

## 一、选择与填空

### 知识点：多元函数极限的计算

1. 极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin xy}{\sqrt{1+x}-1}$  等于 ( B )

A 0      B 2      C 1      D  $\infty$

2. 极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x}{\sqrt{1+xy}-1}$  等于 ( C )

A 0      B 1      C 2      D  $\infty$

### 知识点：空间直线与平面的位置关系

1. 直线  $l: \frac{x}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-6}{1}$  与平面  $\pi: 4x-2y+z=-15$  的位置关系为 ( B )

A. 平行;      B. 垂直;      C. 直线在平面内;      D. 相交不垂直

2. 直线  $l: \frac{x}{2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-6}{3}$  与平面  $\pi: 15x-9y+5z=-15$  的位置关系为 ( C )

A. 平行;      B. 垂直;      C. 直线在平面内;      D. 相交不垂直

### 知识点：旋转曲面

1. 曲线  $\begin{cases} z^2 = 5x \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 \_\_\_\_\_.

$$y^2 + z^2 = 5x$$

2. 方程  $z = a(x^2 + y^2)$  ( $a$  为非零的常数) 表示什么曲面? \_\_\_\_\_

3. 方程  $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$  ( $a$  为非零的常数) 表示什么曲面? \_\_\_\_\_

### 知识点：二重积分的计算

1. 改变  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$  的积分次序为 ( D ).

A  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ ;      B  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ ;

$$C \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx \quad D \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x, y) dx$$

2. 改变  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$  的积分次序为 ( C ) .

$$A \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dx; \quad B \int_0^1 dy \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dx;$$

$$C \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \quad D \int_0^1 dy \int_y^{y^2} \frac{\sin y}{y} dx$$

3. 由曲线  $xy=1$  和直线  $y=x, x=2$  围成平面图形的面积是 ( B )

$$A. \frac{1}{2} - \ln 2 \quad B. \frac{3}{2} - \ln 2 \quad C. \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \quad D. \frac{3}{2} - 2 \ln 2$$

知识点：级数的敛散性

1. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则下列级数发散的是 ( D )

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} 10u_n \quad B. \sum_{n=10}^{\infty} u_n \quad C. \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+10} \quad D. \sum_{n=1}^{\infty} (10 + u_n)$$

2. 下列说法不正确的是 ( D )

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ 绝对收敛}; \quad B. \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

$$C. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ 条件收敛}; \quad D. \text{ 若 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 也收敛};$$

3. 设  $\alpha$  为常数，则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  是 ( C )

$$A. \text{ 绝对收敛}; \quad B. \text{ 条件收敛}$$

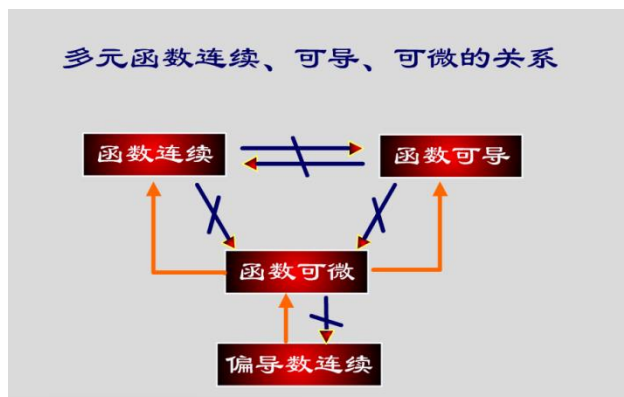
$$C. \text{ 发散}; \quad D. \text{ 收敛性与 } \alpha \text{ 的取值有关}$$

知识点：多元函数连续、可微、可导的关系

1. 函数  $f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  处不连续，则 ( C )

$$A. \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ 必不存在} \quad B. f(x, y) \text{ 在 } P(x_0, y_0) \text{ 必无定义}$$

- C.  $f(x,y)$  在  $P(x_0,y_0)$  必不可微     D.  $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$  必不存在



2、下列说法正确的是( D )

- A. 多元函数在某点的各个偏导数都存在，则在该点一定可微分  
 B. 多元函数在某点的各个偏导数都存在，则在该点一定连续  
 C. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  
 D. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则数列  $\{u_n\}$  有界

3、函数  $f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  处可微是偏导数  $f_x(x_0,y_0)$  与  $f_y(x_0,y_0)$  均存在的  
 ( B ) .

- A. 必要非充分条件                      B. 充分非必要条件  
 C. 充分且必要条件                      D. 非充分且非必要条件

### 知识点：二重积分的性质

1. 比较  $I_1 = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D (x^2 + y^2)^2 d\sigma$  的大小，其中  $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,

则 ( C )

- A.  $I_1 = I_2$                       B.  $I_1 \leq I_2$                       C.  $I_1 \geq I_2$                       D. 无法比较

2. 设  $I_1 = \iint_D (x+y) d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D e^{x+y} d\sigma$ , 若  $D$  由  $X$  轴、 $Y$  轴与直线  $x+y=1$  所围成,

则有 ( A )。

- A、  $I_1 < I_2$                       B、  $I_1 > I_2$                       C、  $I_1 = I_2$                       D、 不确定

## 知识点：微分方程的求解

1、微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$  的一个特解可设为 (其中  $a, b$  为常数) ( A ).

(A)  $y^* = axe^{2x}$

(B)  $y^* = ae^{2x}$

(C)  $y^* = (ax + b)e^{2x}$

(D)  $y^* = ax^2e^{2x}$

## 二、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

综上所述，有以下结论：

方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

具有形如

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \text{不是特征根} \\ 1 & \lambda \text{是特征单根} \\ 2 & \lambda \text{是特征重根} \end{cases}$$

的特解，其中  $k$  按  $\lambda$  不是特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  的根  
是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0, 1 或 2.

2、微分方程  $y'' + 4y' + 4y = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_  $y = (c_1x + c_2)e^{-2x}$

3、微分方程  $y' - 3y = e^{2x}$  的通解为 \_\_\_\_\_  $y = ce^{3x} - e^{2x}$

1. 一阶线性方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

方法1 先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

## 知识点：多元函数的偏导数、微分计算

1. 设  $f(x, y) = x^2y + (y-1)\arctan\sqrt{\frac{y}{x}}$ ，则  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(2,1)} =$  \_\_\_\_\_ 4

2. 设方程  $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$  确定了函数  $z = z(x, y)$ ，则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$  \_\_\_\_\_

$$\frac{zF_2}{xF_1 + yF_2}$$

3. 函数  $z = x^2y + \sin y$  的全微分  $dz =$  \_\_\_\_\_

$$2xydx + (x^2 + \cos y)dy$$

4. 设  $z = x^y (x > 0)$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$  \_\_\_\_\_ 0

知识点: 多元函数微分学在几何中的应用

1. 曲面  $z = 2x^2 + y^2 - 7$  在点  $(1, 1, -4)$  处的切平面方程为 \_\_\_\_\_  $4x + 2y - z - 10 = 0$  \_\_\_\_\_

2. 曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  在  $t = 1$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

知识点: 方向导数与梯度

1. 函数  $u = xy^2z$  在点  $(1, -1, 1)$  处的梯度为 \_\_\_\_\_  $(1, -2, 1)$

2. 函数  $u = xy^2z$  在点  $(1, -1, 1)$  处的方向导数的最大值为 \_\_\_\_\_  $\sqrt{6}$

3. 求函数  $u = xy^2 + z^3 - xyz$  在点  $P_0(1, 1, 1)$  处沿哪个方向的方向导数最大? 最大值是多少? \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_

解 由  $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz, \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy$ , 得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_0} = 2.$$

从而  $\text{grad} u(P_0) = \{0, 1, 2\}, |\text{grad} u(P_0)| = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$ .

于是  $u$  在点  $P_0$  处沿方向  $\{0, 1, 2\}$  的方向导数最大, 最大值是  $\sqrt{5}$ .

知识点: 函数展开为幂级数

1、若  $-1 < x < 1$ , 将函数  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  展开成  $x$  的幂级数 \_\_\_\_\_

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

2、若  $-1 < x < 3$ , 将函数  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  展开成  $x-1$  的幂级数 \_\_\_\_\_

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

3、若  $-3 < x < 3$ , 将函数  $f(x) = \frac{1}{3+x}$  展开成  $x$  的幂级数为 \_\_\_\_\_

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n$$

知识点：级数的收敛域、级数的和

1. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  的和是 \_\_\_\_\_ 1

2. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$  的收敛域为 \_\_\_\_\_  $[1,3)$

知识点：重积分的应用

1. 设  $xoy$  面上一平面薄片占有区域为  $D$ ，该薄片的面密度为连续函数  $\rho(x, y), (x, y) \in D$ ，则该薄片对  $x$  轴的转动惯量为 \_\_\_\_\_  $\iint_D y^2 \rho d\sigma$

知识点：高斯公式、三重积分的计算

1. 设  $\Sigma$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = 1 (1 \leq z \leq 3)$  的表面外侧，

则  $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy =$  \_\_\_\_\_  $6\pi$

设  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ，则  $\iiint_{\Omega} \left( \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} + 3 \right) dx dy dz =$  \_\_\_\_\_  $4\pi$

知识点：定积分的几何应用

1. 曲线  $y = x^2$  与直线  $y = x$  所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周所得立体的体积等于 \_\_\_\_\_  $\frac{\pi}{6}$

知识点：第一类曲线积分的计算

1、设  $L: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ，则曲线积分  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds =$  \_\_\_\_\_  $2\pi$

知识点：积分与路径无关的等价条件

1、已知  $xy dx + \frac{1}{2} ax^2 dy$  是某个二元函数的全微分，则  $a =$  \_\_\_\_\_ 1

**定理2.** 设 $D$ 是单连通域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 $D$ 内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

- (1) 沿 $D$ 中任意光滑闭曲线 $L$ , 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ .
- (2) 对 $D$ 中任一分段光滑曲线 $L$ , 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 只与起止点有关.
- (3)  $Pdx + Qdy$ 在 $D$ 内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,  
即  $du(x,y) = Pdx + Qdy$
- (4) 在 $D$ 内每一点都有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

## 二、计算与证明

知识点: 点乘、叉乘

1、设向量 $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ 两两垂直, 符合右手规则, 且 $|\vec{m}|=4, |\vec{n}|=2, |\vec{p}|=3$ ,

计算 $(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p}$ .

解  $|\vec{m} \times \vec{n}| = |\vec{m}| |\vec{n}| \sin(\vec{m}, \vec{n}) = 4 \times 2 \times 1 = 8$ , 依题意知 $\vec{m} \times \vec{n}$ 与 $\vec{p}$ 同向,

$\therefore \theta = (\vec{m} \times \vec{n}, \vec{p}) = 0, (\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p} = |\vec{m} \times \vec{n}| \cdot |\vec{p}| \cos \theta = 8 \cdot 3 = 24$ .

知识点: 多元函数的偏导计算

1、设函数 $z = \sin(u+v)$ , 其中 $u = xy, v = e^x$ , 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$  (本题8分)

解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = (y + e^x) \cos(xy + e^x)$  (4分)  $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy + e^x)$  (8分)

2、证明由方程 $F(x-z, y-z) = 0$ 确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

证明：令  $G(x, y, z) = F(x - z, y - z)$ ，则  $G_x = F'_1$ ，  
 $G_y = F'_2$   $G_z = -F'_1 - F'_2$ ， .....3分

$$\text{于是 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z} = \frac{F'_1}{F'_1 + F'_2}, \text{ .....5分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z} = \frac{F'_2}{F'_1 + F'_2}, \text{ .....6分 (注：两个偏导中任写一个2分，第二个1分)}$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1. \text{ .....7分}$$

证明（法二）：因为方程  $F(x - z, y - z) = 0$  确定的函数为  $z = z(x, y)$ ，  
 所以对上方程两边分别关于  $x$  和  $y$  求偏导，得如下两方程：

$$(1 - \frac{\partial z}{\partial x})F'_1 - \frac{\partial z}{\partial x}F'_2 = 0, \text{ .....2分}$$

$$-\frac{\partial z}{\partial y}F'_1 + (1 - \frac{\partial z}{\partial y})F'_2 = 0, \text{ .....3分}$$

从以上两方程可解得

$$\text{于是 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_1}{F'_1 + F'_2}, \text{ .....5分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_2}{F'_1 + F'_2}, \text{ .....6分 (注：两个偏导中任写一个2分，第二个1分)}$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1. \text{ .....7分}$$

3、已知  $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

解：令  $u = x^2 - y^2, v = e^{xy}$ ，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} y e^{xy} \text{ .....4分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\partial f}{\partial u} y + \frac{\partial f}{\partial v} x e^{xy} \text{ .....8分}$$

4. 证明：函数  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  满足关系式  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 。

证明：

$$z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \text{ 计算偏导数；}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ .....4分}$$

再计算二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \dots$$

$$\text{所以有 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \dots\dots \quad \dots 7 \text{ 分}$$

### 知识点：多元函数的极值计算

**定理2 (充分条件)** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{令 } A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

则: 1) 当  $AC - B^2 > 0$  时, 具有极值  $\begin{cases} A < 0 \text{ 时取极大值;} \\ A > 0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当  $AC - B^2 < 0$  时, 没有极值.

3) 当  $AC - B^2 = 0$  时, 不能确定, 需另行讨论.

1、求函数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x + y)$  的极值.(本题 10 分)

解: 由  $f_x = 3x^2 - 3 = 0, f_y = 3y^2 - 3 = 0$

得驻点  $(1, -1), (1, 1), (-1, -1), (-1, 1)$  (3 分) 又  $A = 6x, B = 0, C = 6y$

在点  $(1, 1)$  处  $AC - B^2 = 36 > 0 \quad A = 6 > 0$

所以函数在  $(1, 1)$  处取得极小值  $-4$  (6 分)

在点  $(-1, -1)$  处  $AC - B^2 = 36 > 0 \quad A = -6 < 0$

所以函数在  $(-1, -1)$  处取得极大值  $4$  (8 分)

在点  $(-1, 1), (1, -1)$  处  $AC - B^2 = -36 < 0$

所以函数在  $(-1, 1), (1, -1)$  处不取得极值 (10 分)

2、求函数  $z = x^2 + y^2 + xy + 3y - 5$  的极值 (本题 8 分)

解:  $\begin{cases} z_x = 2x + y = 0 \\ z_y = x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$  得驻点  $(1, -2)$  2 分

$$A = z_{xx} = 2, B = z_{xy} = 1, C = z_{yy} = 2$$

在点  $(1, -2)$  处  $AC - B^2 = 3 > 0, A = 2 > 0$  6 分

所以函数在  $(1, -2)$  取得极小值  $-8$  8 分

3、函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = 2xdx + 2ydy$ , 且  $f(1, 1) = 2$ , 求函数的极值。

六、解:  $dz = 2xdx + 2ydy$ ,  $z = x^2 + y^2 + c$  由  $f(1, 1) = 2$  得  $c = 0$  (4 分)

$z_x = 2x = 0, z_y = 2y = 0$  得驻点  $(0, 0)$ , 在  $(0, 0)$  处  $AC - B^2 = 4 > 0$  且  $A > 0$

所以函数在  $(0, 0)$  处有极小值  $z(0, 0) = 0$  (8 分)

知识点: 定积分在几何中的应用

1、计算由两条抛物线  $y^2 = x$  与  $y = x^2$  所围成的图形的面积。(本题 8 分, 要求作图)

解: 由  $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$  得交点  $(1, 1)$  与  $(0, 0)$

所求面积  $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$  .....4 分

$$= \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

知识点: 二重积分的计算

1、计算  $\iint_D |y - 2x^2| dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ . (本题 8 分)

解: 画出图形, 在  $D$  内作  $y = 2x^2$  将  $D$  分为  $D_1, D_2$  两部分, (2 分)

$$\iint_D |y - 2x^2| d\sigma = \iint_{D_1} (2x^2 - y) dx dy + \iint_{D_2} (y - 2x^2) d\sigma \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x^2} (2x^2 - y) dy + \int_0^1 dx \int_{2x^2}^2 (y - 2x^2) dy = \frac{22}{15} \quad (8 \text{ 分})$$

2、计算二重积分  $\iint_D (2x+y)^2 dx dy$  ; 其中  $D$  为  $x^2 + y^2 \leq 1$  (本题 8 分)

解: 由对称性得  $\iint_D (2x+y)^2 dx dy = \iint_D (4x^2 + y^2) dx dy$  2 分

$$= \frac{5}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{5\pi}{4}$$
 8 分

3、证明:  $\iint_D (x^3 e^{-x^2 y} + y \sin x^2 + 3) dx dy = 3\pi$  , 其中平面区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

证明: 积分区域  $D$  关于  $x$  轴和  $y$  轴均对称,  
 $f(x, y) = x^3 e^{-x^2 y}$  是关于  $x$  的奇函数,  
 $g(x, y) = y \sin x^2$  是关于  $y$  的奇函数, ..... 2 分  
 所以  
 $\iint_D x^3 e^{-x^2 y} dx dy = 0, \iint_D y \sin x^2 dx dy = 0, \dots\dots\dots 4$  分  
 于是  $\iint_D (x^3 e^{-x^2 y} + y \sin x^2 + 3) dx dy = \iint_D 3 dx dy = 3\pi \cdot 1^2 = 3\pi.$

知识点: 第二类曲线积分的计算, 积分与路径无关

1、设  $L$  为正向圆周  $x^2 + y^2 = 2$  , 求曲线积分  $\oint_L (-2y) dx + x dy$  的值。

【解法一】 正向圆周  $x^2 + y^2 = 2$  , 可表示为  
 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta, \end{cases} \theta: 0 \rightarrow 2\pi. \dots\dots\dots 3$  分  
 于是  $\oint_L x dy - 2y dx = \int_0^{2\pi} [\sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cdot \sqrt{2} \sin \theta] d\theta$   
 $= 4\pi + \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \theta d\theta = 6\pi. \dots\dots\dots 8$  分  
 【解法二】 利用格林公式  
 设正向圆周  $L$  围成的闭区域为  $D$ ,  
 $P = -2y, Q = x, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-2) = 3, \dots\dots\dots 3$  分  
 $\oint_L x dy - 2y dx$   
 $= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy = 3 \iint_D dx dy = 3 \cdot \pi (\sqrt{2})^2 = 6\pi \dots\dots\dots 8$  分

2、计算  $I = \int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin y) dy$  , 其中  $L$  是在圆周  $y = \sqrt{2x - x^2}$  上由点  $(0,0)$  到点  $(1,1)$  的一段弧 (本题 8 分)

解: 令  $P = x^2 - y, Q = -(x + \sin y)$

由  $\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$  , 所以所给积分与路径无关 (3 分)

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin y)dy &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (1 + \sin y)dy \\ &= \frac{1}{3} + (-2 + \cos 1) = -\frac{5}{3} + \cos 1 \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

3、计算  $I = \int_L (e^y + 3x^2)dx + (xe^y + 2y)dy$  , 其中  $L$  为过点  $O(0,0)$  ,  $A(0,1)$  ,  $B(1,2)$

的圆周从点  $O$  经点  $A$  到点  $B$  (本题 8 分)

解: 由  $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$  所以曲线积分与路径无关 (3 分)

$$I = \int_L (e^y + 3x^2)dx + (xe^y + 2y)dy = \int_0^1 (1 + 3x^2)dx + \int_0^2 (e^y + 2y)dy = e^2 + 5$$

(8 分)

### 知识点: 三重积分的计算

#### 方法1. 投影法 (“先一后二” “穿面法”)

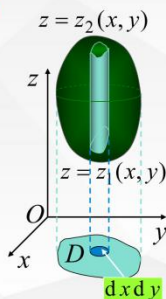
$$\Omega: \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

细棒微元的质量为

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

该物体的质量为

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \\ &= \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &\stackrel{\text{记作}}{=} \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$



#### 方法2. 截面法 (“先二后一”)

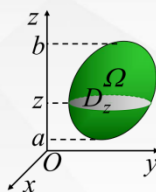
$$\Omega: \begin{cases} (x, y) \in D_z \\ a \leq z \leq b \end{cases}$$

以  $D_z$  为底,  $dz$  为高的柱形薄片质量为

$$\left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

该物体的质量为

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \\ &= \int_a^b \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \\ &\stackrel{\text{记作}}{=} \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$



1、计算  $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ，其中  $\Omega$  由椭圆柱面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$  与平面  $z=0, z=2$  所围成的闭区域。

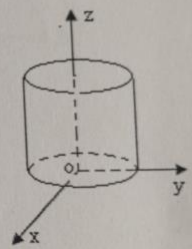
1. 计算  $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ，其中  $\Omega$  由椭圆柱面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$  与平面  $z=0, z=2$  围成的闭区域。

解：积分区域为  $\Omega = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$  .....3 分

$$I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$$

$$= \int_0^2 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= 3\sqrt{2}\pi \int_0^2 z^2 dz$$

$$= 8\sqrt{2}\pi \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$


2、设  $\Omega$  由  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z=1$  所围成的区域，求  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  的值（本题 8 分）

解：用柱面坐标计算， $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 r dz$  (5 分)

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 (1 - r^2) dr = \frac{4\pi}{15} \quad (8 \text{ 分})$$

知识点：幂级数的收敛域、和函数

1、求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n}$  的收敛半径和收敛域。

解：由于  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 5^n}{(n+2) \cdot 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{5(n+2)} = \frac{1}{5}$ , ..... 3 分

因而收敛半径  $R = \frac{1}{\rho} = 5$ . ..... 4 分

当  $x = -5$  时，幂级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ ，由交错级数判别法可知， $x = -5$  时，幂级数收敛。... 5 分

当  $x = 5$  时，幂级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$  发散。 ..... 6 分

因此，幂级数的收敛域为  $[-5, 5)$ . ..... 8 分

2、求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  的收敛域与该幂级数的和函数，并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的值（本题 10 分）

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , 所以收敛区间为  $(-1, 1)$

当  $x=1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  发散, 当  $x=-1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$  发散

所以幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛域为  $(-1, 1)$  (4 分)

令  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{1+n} \right)' - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' - \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = s\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad (10 \text{ 分})$$

知识点: 收敛级数的性质

1、设级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$  收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  绝对收敛, 试证级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  绝对收敛 (本

4 分)

证明: 记  $s_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s + a_0$  (2 分)

则存在  $M > 0$  有  $|a_n| \leq M$ , 又  $|a_n b_n| \leq M |b_n|$

而  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  绝对收敛 (4 分)

知识点: 直线与平面的方程

1、求直线  $L: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi: x + 2y - z = 0$  上的投影直线的方程 (本

题 8 分)

解: 设过  $L$  的平面为  $2x - y + z - 1 + \lambda(x + y - z + 1) = 0$  2 分

该平面与  $\pi$  垂直,  $2 + \lambda + 2(\lambda - 1) - (1 - \lambda) = 0$ , 所以  $\lambda = \frac{1}{4}$  6 分

所求直线为  $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$  8 分

2、求平行于直线  $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  且通过直线  $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$  的平面方程

解：所求平面的法向量  $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (2, 1, 1) \times (1, 0, 1) = (1, -1, -1)$  .....4分  
 平面过直线  $L_2$ ，当然过点  $(1, 2, 3)$ ，根据平面的点法式方程，有  
 $1 \cdot (x-1) + (-1)(y-2) + (-1)(z-3) = 0$ ， .....6分  
 即  $x - y - z + 4 = 0$  .....8分

3、求曲面  $xy^2 - yz^2 + zx^2 = 1$  在点  $(1, 1, 1)$  处的切平面方程和法线方程。

解：设  $F(x, y, z) = xy^2 - yz^2 + zx^2 - 1$ ，  
 则曲面的切向量为  $\vec{n} = (y^2 + 2xz, 2xy - z^2, x^2 - 2yz)$ ，  
 在点  $(1, 1, 1)$  处的切向量为  $\vec{n}|_{(1,1,1)} = (3, 1, -1)$ ， .....4分  
 从而切平面方程为：  $3(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0$ 。  
 或：  $3x + y - z - 3 = 0$  .....6分  
 法线方程：  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$  .....8分

4、求过点  $A(2, -1, 4)$ ,  $B(-1, 3, -2)$  和  $C(0, 2, 3)$  的平面方程。

解  $\vec{AB} = \{-3, 4, -6\}$ ,  $\vec{AC} = \{-2, 3, -1\}$ , 取  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0, = 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k},$

所求平面方程为 化简得  $14x + 9y - z - 15 = 0$ .

知识点：微分方程的求解

1、求微分方程  $dx + xydy = y^2dx + ydy$  的通解。

解 先合并  $dx$  及  $dy$  的各项, 得  $y(x-1)dy = (y^2-1)dx$

设  $y^2 - 1 \neq 0, x - 1 \neq 0$ , 分离变量得  $\frac{y}{y^2 - 1} dy = \frac{1}{x - 1} dx$

两端积分  $\int \frac{y}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{x - 1} dx$  得  $\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \ln |x - 1| + \ln |C_1|$

于是  $y^2 - 1 = \pm C_1^2 (x - 1)^2$  记  $C = \pm C_1^2$ , 则得到题设方程的通解  $y^2 - 1 = C(x - 1)^2$ .

**小结:**  $y'' + p y' + q y = 0$  ( $p, q$  为常数)

特征根:  $r_1, r_2$

(1) 当  $r_1 \neq r_2$  时, 通解为  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当  $r_1 = r_2$  时, 通解为  $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  时, 通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解.

2、求方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解.

解 所给微分方程的特征方程为  $r^2 - 2r - 3 = 0$ ,

其根  $r_1 = -1, r_2 = 3$  是两个不相等的实根, 因此所求通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ .

3、求方程  $y'' + 4y' + 4y = 0$  的通解.

解 特征方程为  $r^2 + 4r + 4 = 0$ , 解得  $r_1 = r_2 = -2$ , 故所求通解为  $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$ .

4、求方程  $y'' + 2y' + 5y = 0$  的通解.

解 特征方程为  $r^2 + 2r + 5 = 0$ , 解得  $r_{1,2} = -1 \pm 2i$ , 故所求通解为

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

1. 一阶线性方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

方法1 先解齐次方程, 再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$$

5、求方程  $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$  的通解.

解  $P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{\sin x}{x}$ , 于是所求通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = e^{-\ln x} \left( \int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C \right) = \frac{1}{x} (-\cos x + C).$$