

一、选择与填空

知识点：多元函数极限的计算

1. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin xy}{\sqrt{1+x}-1}$ 等于 ()

A 0 B 2 C 1 D ∞

2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x}{\sqrt{1+xy}-1}$ 等于 ()

A 0 B 1 C 2 D ∞

知识点：空间直线与平面的位置关系

1. 直线 $l: \frac{x}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-6}{1}$ 与平面 $\pi: 4x-2y+z=-15$ 的位置关系为 ()

A. 平行; B. 垂直; C. 直线在平面内; D. 相交不垂直

2. 直线 $l: \frac{x}{2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-6}{3}$ 与平面 $\pi: 15x-9y+5z=-15$ 的位置关系为 ()

A. 平行; B. 垂直; C. 直线在平面内; D. 相交不垂直

知识点：旋转曲面

1. 曲线 $\begin{cases} z^2 = 5x \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为_____.

2. 方程 $z = a(x^2 + y^2)$ (a 为非零的常数) 表示什么曲面? _____

3. 方程 $z = a\sqrt{(x^2 + y^2)}$ (a 为非零的常数) 表示什么曲面? _____

知识点：二重积分的计算

1. 改变 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 的积分次序为 () .

A $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$; B $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$;

C $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx$ D $\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x, y) dx$

2. 改变 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 的积分次序为 () .

A. $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dx$;

B. $\int_0^1 dy \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dx$;

C. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx$

D. $\int_0^1 dy \int_y^{y^2} \frac{\sin y}{y} dx$

3. 由曲线 $xy=1$ 和直线 $y=x, x=2$ 围成平面图形的面积是 ()

A. $\frac{1}{2} - \ln 2$

B. $\frac{3}{2} - \ln 2$

C. $\frac{1}{2} - 2 \ln 2$

D. $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$

知识点：级数的敛散性

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} 10u_n$

B. $\sum_{n=10}^{\infty} u_n$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+10}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (10 + u_n)$

2. 下列说法不正确的是()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛；

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛；

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛；

3. 设 α 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 是 ()

A. 绝对收敛；

B. 条件收敛

C. 发散；

D. 收敛性与 α 的取值有关

知识点：多元函数连续、可微、可导的关系

1. 函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处不连续, 则 ()

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 必不存在 B. $f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 必无定义
C. $f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 必不可微 D. $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 必不存在

2、 下列说法正确的是()

- A. 多元函数在某点的各个偏导数都存在, 则在该点一定可微分
B. 多元函数在某点的各个偏导数都存在, 则在该点一定连续
C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则数列 $\{u_n\}$ 有界

3、 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微是偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 均存在的

() .

- A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充分且必要条件 D. 非充分且非必要条件

知识点: 二重积分的性质

1. 比较 $I_1 = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x^2 + y^2)^2 d\sigma$ 的大小, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$,

则 ()

- A. $I_1 = I_2$ B. $I_1 \leq I_2$ C. $I_1 \geq I_2$ D. 无法比较

2. 设 $I_1 = \iint_D (x + y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D e^{x+y} d\sigma$, 若 D 由 X 轴、 Y 轴与直线 $x + y = 1$ 所围成,

则有 ()。

- A、 $I_1 < I_2$ B、 $I_1 > I_2$ C、 $I_1 = I_2$ D、 不确定

知识点: 微分方程的求解

1、微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$ 的一个特解可设为 (其中 a, b 为常数) ().

(A) $y^* = axe^{2x}$

(B) $y^* = ae^{2x}$

(C) $y^* = (ax + b)e^{2x}$

(D) $y^* = ax^2e^{2x}$

2、微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为 _____

3、微分方程 $y' - 3y = e^{2x}$ 的通解为 _____

知识点：多元函数的偏导数、微分计算

1. 设 $f(x, y) = x^2y + (y-1)\arctan\sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)} =$ _____

2. 设方程 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

3. 函数 $z = x^2y + \sin y$ 的全微分 $dz =$ _____

4. 设 $z = x^y (x > 0)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____

知识点：多元函数微分学在几何中的应用

1. 曲面 $z = 2x^2 + y^2 - 7$ 在点 $(1, 1, -4)$ 处的切平面方程为 _____

2. 曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在 $t = 1$ 处的切线方程为 _____

知识点：方向导数与梯度

1. 函数 $u = xy^2z$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处的梯度为 _____

2. 函数 $u = xy^2z$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处的方向导数的最大值为 _____

3. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大? 最大值是多少? _____、_____

知识点：函数展开为幂级数

1、若 $-1 < x < 1$ ，将函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 展开成 x 的幂级数 _____

2、若 $-1 < x < 3$ ，将函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数 _____

3、若 $-3 < x < 3$ ，将函数 $f(x) = \frac{1}{3+x}$ 展开成 x 的幂级数为 _____

知识点：级数的收敛域、级数的和

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的和是 _____

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ 的收敛域为 _____

知识点：重积分的应用

1. 设 xoy 面上一平面薄片占有区域为 D ，该薄片的面密度为连续函数 $\rho(x, y), (x, y) \in D$ ，则该薄片对 x 轴的转动惯量为 _____

知识点：高斯公式、三重积分的计算

1. 设 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1 (1 \leq z \leq 3)$ 的表面外侧，

则 $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy =$ _____

2. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ，则 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} + 3 \right) dx dy dz =$ _____

知识点：定积分的几何应用

1. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得立体的体积等于 _____

知识点：第一类曲线积分的计算

1、设 $L: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ，则曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds =$ _____

知识点：积分与路径无关的等价条件

1、已知 $xydx + \frac{1}{2}ax^2dy$ 是某个二元函数的全微分，则 $a =$ _____

二、计算与证明

知识点：点乘、叉乘

1、设向量 $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ 两两垂直，符合右手规则，且 $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 2$, $|\vec{p}| = 3$,

计算 $(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p}$.

知识点：多元函数的偏导计算

1. 设函数 $z = \sin(u + v)$ ，其中 $u = xy$ ， $v = e^x$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$

2. 证明由方程 $F(x-z, y-z)=0$ 确定的函数 $z=z(x, y)$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

3. 已知 $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 证明:函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足关系式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

知识点: 多元函数的极值计算

1、求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x + y)$ 的极值.

2、求函数 $z = x^2 + y^2 + xy + 3y - 5$ 的极值

3、函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = 2xdx + 2ydy$, 且 $f(1,1) = 2$, 求函数的极值。

知识点: 定积分在几何中的应用

1、计算由两条抛物线 $y^2 = x$ 与 $y = x^2$ 所围成的图形的面积。(要求作图)

知识点：二重积分的计算

1. 计算 $\iint_D |y - 2x^2| dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.
2. 计算二重积分 $\iint_D (2x + y)^2 dx dy$; 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$
3. 证明: $\iint_D (x^3 e^{-x^2 y} + y \sin x^2 + 3) dx dy = 3\pi$, 其中平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

知识点：第二类曲线积分的计算，积分与路径无关

- 1、设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$, 求曲线积分 $\oint_L (-2y) dx + x dy$ 的值。
- 2、计算 $I = \int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin y) dy$, 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。
- 2、计算 $I = \int_L (e^y + 3x^2) dx + (xe^y + 2y) dy$, 其中 L 为过点 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,2)$ 的圆周从点 O 经点 A 到点 B .

知识点：三重积分的计算

1、计算 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ，其中 Ω 由椭圆柱面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的闭区域。

1、设 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的区域，求 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ 的值

知识点：幂级数的收敛域、和函数

1、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n}$ 的收敛半径和收敛域。

3、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域与该幂级数的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的值

知识点：收敛级数的性质

1、设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛， $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛，试证级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 绝对收敛

知识点：直线与平面的方程

1、求直线 $L: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x + 2y - z = 0$ 上的投影直线的方程

2、求平行于直线 $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 且通过直线 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$ 的平面方程

3、求曲面 $xy^2 - yz^2 + zx^2 = 1$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程和法线方程。

4、求过点 $A(2,-1,4), B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

知识点：微分方程的求解

1、求微分方程 $dx + xydy = y^2dx + ydy$ 的通解.

2、求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

3、求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

4、求方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

5、求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.