

高等数学 A（下）练习试卷

参考答案与详细解析

说明：

- 本答案按照规范考试答题格式整理，保留主要计算步骤与判定依据；
- 选择题、填空题给出必要推导，解答题和证明题按步骤展开；
- 同一问题存在等价写法时，答案形式等价即可。

试卷结构： 单项选择题、填空题、解答题、证明题

总分： 100 分

适用内容： 常微分方程、多元函数微分学、重积分、级数、空间解析几何、曲线积分

规范步骤版

1、 答案总览

题号	1	2	3	4	5
单项选择题	B	D	C	A	C

题号	1	2	3	4	5
填空题	-4	$y < x^2$	2	0	3

解答题	最终结果
1	$y = \frac{1}{Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}}$, 另有零解 $y \equiv 0$
2	$S = \frac{3}{2} - \ln 2$
3	在 $(-1,0)$ 处取得极小值 -1 , 无极大值
4	$\pi(e^9 - 1)$
5	收敛域为 $(-1,1]$
6	$x - y - z + 4 = 0$
7	6π

2、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的通解

解: 这是二阶常系数齐次线性微分方程。设 $y = e^{rx}$, 得到特征方程

$$r^2 - 4r + 3 = 0.$$

因式分解得

$$(r - 1)(r - 3) = 0,$$

故两个不同的特征根为

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 3.$$

因此通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

选择 **B**

2. 函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的驻点

解: 驻点必须满足两个一阶偏导数同时为零。计算得

$$f_x = 4 - 2x, \quad f_y = -4 - 2y.$$

令 $f_x = f_y = 0$, 得到

$$4 - 2x = 0, \quad -4 - 2y = 0,$$

即

$$x = 2, \quad y = -2.$$

所以驻点为 $(2, -2)$ 。

选择 **D**

3. 函数 $z = x^2y + y^3$ 在点 $(2, 1)$ 处的全微分

解: 全微分公式为

$$dz = z_x dx + z_y dy.$$

分别求偏导:

$$z_x = 2xy, \quad z_y = x^2 + 3y^2.$$

在点 $(2, 1)$ 处,

$$z_x(2, 1) = 4, \quad z_y(2, 1) = 4 + 3 = 7.$$

所以

$$dz = 4 dx + 7 dy.$$

选择

4. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, 计算 $\iint_D dx dy$

解: 二重积分

$$\iint_D 1 dx dy$$

表示区域 D 的面积。区域 D 是半径为 3 的圆盘, 因此

$$\iint_D dx dy = \pi \cdot 3^2 = 9\pi.$$

选择

5. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性

解: 级数收敛必有通项趋于零, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

但反过来不成立。例如,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 另一方面, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛。因此, 仅由 $u_n \rightarrow 0$ 不能判断级数的敛散性。

选择

3、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 已知 $\vec{a} = (3, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, k)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 k

解: 两向量垂直的充要条件是内积为零:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + 2 \times (-1) + 1 \times k = 0.$$

于是

$$6 - 2 + k = 0,$$

解得

$$k = -4.$$

$$k = -4$$

2. 函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$ 的定义域

解: 根号中的式子必须有意义, 同时分母不能为零。因此要求

$$x^2 - y > 0.$$

等价地,

$$y < x^2.$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 - y > 0\} = \{(x, y) \mid y < x^2\}$$

3. 计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解: 对分母有理化:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)} \\ &= \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} \\ &= \sqrt{xy+1}+1. \end{aligned}$$

当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $xy \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2.$$

$$2$$

4. 设 $z = x^2y + 2y^2x$, 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

解: 先分别求两个二阶混合偏导数:

$$z_x = 2xy + 2y^2, \quad z_{xy} = 2x + 4y;$$

$$z_y = x^2 + 4xy, \quad z_{yx} = 2x + 4y.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2x + 4y) - (2x + 4y) = 0.$$

0

5. 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

解: 这是首项 $a_1 = \frac{3}{4}$ 、公比 $q = \frac{3}{4}$ 的等比级数。因为 $|q| < 1$, 故级数收敛, 并且

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3.$$

3

4、解答题 (每小题 8 分, 共 56 分)

1. 求微分方程 $y' - 3xy = xy^2$ 的通解

解: 方程是伯努利方程。先在 $y \neq 0$ 的情形下求解。

原方程两边同除以 y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} - 3x \frac{1}{y} = x.$$

令

$$u = \frac{1}{y},$$

则

$$u' = -\frac{y'}{y^2}.$$

代入上式可得

$$-u' - 3xu = x,$$

即

$$u' + 3xu = -x.$$

该线性方程的积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int 3x dx} = e^{\frac{3}{2}x^2}.$$

方程两边乘以积分因子:

$$e^{\frac{3}{2}x^2} u' + 3xe^{\frac{3}{2}x^2} u = -xe^{\frac{3}{2}x^2}.$$

左端是乘积的导数, 因此

$$\left(ue^{\frac{3}{2}x^2}\right)' = -xe^{\frac{3}{2}x^2}.$$

两边积分:

$$\begin{aligned} ue^{\frac{3}{2}x^2} &= -\int xe^{\frac{3}{2}x^2} dx + C \\ &= -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C. \end{aligned}$$

故

$$u = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

由于 $u = \frac{1}{y}$, 所以

$$\frac{1}{y} = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3},$$

从而

$$y = \frac{1}{Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}}.$$

此外, 前面除以 y^2 时可能遗漏 $y = 0$ 。代入原方程验证可知 $y \equiv 0$ 也是解。

$$y = \frac{1}{Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}}, \text{ 另有零解 } y \equiv 0$$

评分要点: 写成 $y = \frac{3}{Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - 1}$ 也与上式等价, 其中常数 C 可重新记号。

2. 计算由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 、直线 $y = x$ 及 $x = 2$ 围成图形的面积

解: 先求 $y = x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的交点:

$$x = \frac{1}{x} \implies x^2 = 1.$$

由于题目中的边界还包括 $x = 2$, 所围区域位于第一象限, 取交点 $(1, 1)$ 。

在区间 $1 \leq x \leq 2$ 上, 有

$$x \geq \frac{1}{x},$$

所以直线 $y = x$ 是上边界, 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 是下边界。面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^2 \\ &= (2 - \ln 2) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

$$S = \frac{3}{2} - \ln 2$$

3. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 3y + 1$ 的极值

解: 先求一阶偏导数:

$$f_x = 4x - 3y + 4, \quad f_y = -3x + 4y - 3.$$

令 $f_x = f_y = 0$, 得到

$$\begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ -3x + 4y = 3. \end{cases}$$

解得

$$x = -1, \quad y = 0.$$

因此唯一驻点为 $(-1, 0)$ 。

再计算二阶偏导数:

$$f_{xx} = 4, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 4.$$

二元函数极值判别式为

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 \times 4 - (-3)^2 = 7 > 0.$$

又因为

$$f_{xx} = 4 > 0,$$

故 $(-1, 0)$ 是极小值点。

极小值为

$$\begin{aligned} f(-1, 0) &= 2(-1)^2 - 3(-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 4(-1) - 3 \cdot 0 + 1 \\ &= 2 - 4 + 1 = -1. \end{aligned}$$

函数在 $(-1, 0)$ 处取得极小值 -1 , 无极大值

4. 计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2 + y^2 = 9$ 围成的闭区域

解: 区域 D 是半径为 3 的圆盘。由于被积函数只含 $x^2 + y^2$, 采用极坐标变换:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad d\sigma = r dr d\theta.$$

积分区域对应为

$$0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^3 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^9 - 1) d\theta \\ &= \pi(e^9 - 1). \end{aligned}$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \pi(e^9 - 1)$$

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域

解: 先考察绝对收敛性。令

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

由比值判别法,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{n}{n+1} \\ &= |x|. \end{aligned}$$

因此, 当 $|x| < 1$ 时绝对收敛; 当 $|x| > 1$ 时发散, 收敛半径为

$$R = 1.$$

下面检查端点。

当 $x = 1$ 时, 原级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

这是交错调和级数, 由莱布尼茨判别法知其收敛。

当 $x = -1$ 时, 原级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

它发散。

因此收敛域为

$$-1 < x \leq 1.$$

收敛域为 $(-1, 1]$; 其中 $|x| < 1$ 时绝对收敛, $x = 1$ 时条件收敛

6. 求平行于直线 $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 且通过直线 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$ 的平面方程

解: 直线 L_1 的方向向量为

$$\vec{v}_1 = (2, 1, 1).$$

直线 L_2 的方向向量为

$$\vec{v}_2 = (1, 0, 1),$$

并且 L_2 经过点

$$P_0 = (1, 2, 3).$$

所求平面通过 L_2 , 故包含方向向量 $\vec{v}_2$; 又因为平面平行于 L_1 , 故也包含与 $\vec{v}_1$ 平行的方向。因此平面法向量可以取

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1, -1, -1). \end{aligned}$$

由平面的点法式,

$$(1, -1, -1) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3) = 0.$$

展开得

$$(x - 1) - (y - 2) - (z - 3) = 0,$$

所以

$$x - y - z + 4 = 0.$$

$$x - y - z + 4 = 0$$

7. 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$, 求 $\oint_L (-2y) dx + x dy$

解: 令

$$P(x, y) = -2y, \quad Q(x, y) = x.$$

曲线 L 为正向闭曲线, 可使用格林公式:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

计算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2,$$

所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-2) = 3.$$

因此

$$\oint_L (-2y) dx + x dy = \iint_D 3 dx dy.$$

区域 D 是半径为 $\sqrt{2}$ 的圆盘, 其面积为

$$\pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi.$$

故

$$\oint_L (-2y) dx + x dy = 3 \times 2\pi = 6\pi.$$

$$6\pi$$

5、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设 $z = \ln(xy) + \frac{y}{x}$, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$

证明: 先对 x 求偏导:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial}{\partial x} \ln(xy) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

因此

$$xz_x = 1 - \frac{y}{x}.$$

再对 y 求偏导:

$$\begin{aligned} z_y &= \frac{\partial}{\partial y} \ln(xy) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) \\ &= \frac{1}{y} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

因此

$$yz_y = 1 + \frac{y}{x}.$$

两式相加:

$$\begin{aligned} xz_x + yz_y &= \left(1 - \frac{y}{x} \right) + \left(1 + \frac{y}{x} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

所以

$$\boxed{x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2}.$$

证毕。

2. 设 L 是任意一条光滑闭曲线, 证明 $\oint_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$

证明: 注意到函数

$$F(x, y) = x^2 y$$

的全微分为

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ &= 2xy \, dx + x^2 \, dy. \end{aligned}$$

因此被积表达式是全微分:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = d(x^2 y).$$

于是

$$\oint_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = \oint_L d(x^2y).$$

因为 L 是闭曲线, 起点和终点相同, 而全微分的曲线积分只与起点、终点有关, 所以

$$\begin{aligned}\oint_L d(x^2y) &= (x^2y)_{\text{终点}} - (x^2y)_{\text{起点}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

故

$$\boxed{\oint_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = 0}.$$

证毕。

另一种证明: 也可使用格林公式。取 $P = 2xy$, $Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0,$$

故闭曲线积分等于 0。