

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的通解是().
A. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ B. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
C. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ D. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
2. 函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的驻点是().
A. $(-2, 2)$ B. $(-2, 1)$ C. $(2, 2)$ D. $(2, -2)$
3. 函数 $z = x^2 y + y^3$ 在点 $(2, 1)$ 处的全微分 $dz =$ ().
A. $2dx + 3dy$ B. $4dx + 6dy$ C. $4dx + 7dy$ D. $dx + 3dy$
4. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$, 则 $\iint_D dx dy =$ ().
A. 9π B. 6π C. 4π D. 2π
5. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则().
A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛 B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散
C. 不能判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性 D. $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\vec{a} = (3, 2, 1), \vec{b} = (2, -1, k)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $k =$ _____.
2. 函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$ 的定义域是 _____.
3. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy} + 1} =$ _____.
4. 设 $z = x^2 y + 2y^2 x$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____.
5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n =$ _____.

三、解答题（每小题 8 分，共 56 分）

1. 求微分方程 $y' - 3xy = xy^2$ 的通解.
2. 计算由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$ 所围成的图形的面积.
3. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 3y + 1$ 的极值.
4. 计算 $\iint_D e^{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 9$ 围成的闭区域.
5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域.
6. 求平行于直线 $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 且通过直线 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$ 的平面方程.
7. 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$, 求曲线积分 $\oint_L (-2y)dx + xdy$ 的值.

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 $z = \ln(xy) + \frac{y}{x}$, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.
2. 设 L 是任意一条光滑的闭曲线, 证明: $\oint_L 2xy dx + x^2 dy = 0$.