

高数下综合 (1)

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\int_{-1}^1 x^{2021} \sqrt{1-\sin^2 x} dx = (\quad)$.

- A. 1 B. 0 C. 2021 D. 2020

2. 下列广义积分发散的是 () .

A. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ C. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ D. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = (\quad)$.

A. $\int_0^e dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$
C. $\int_0^e dy \int_e^{e^y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_e^{e^y} f(x, y) dx$

4. 下列级数中一定绝对收敛的是 () .

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{n^2}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \cos \frac{n\pi}{5}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n$

5. 已知 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$, 则 $f(x) = (\quad)$.

- A. $e^x \ln 2$ B. $e^{2x} \ln 2$ C. $e^x + \ln 2$ D. $e^{2x} + \ln 2$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $u = \ln(xy+z)$, 则 $du|_{(1,2,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 微分方程 $y''' + \sin xy' - x = \cos x$ 的通解中所含独立常数的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=3$ 处收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(选填条件收敛、绝对收敛、发散)

三、解答题 (每小题 8 分, 共 56 分)

1. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{x^4}.$

2. 已知 $z = u^2 \ln v, u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

3. 求 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

4. 求微分方程 $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$ 的通解.

5. 某工厂生产两种高端产品甲和乙, 出售单价分别为 10 万元与 9 万元, 生产 x 单位的产品甲与生产 y 单位的产品乙的总费用是 $400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$ 万元, 求取得最大利润时, 两种产品的产量各为多少?

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 $s(x)$.

7. 计算 $I = \iint_D \sqrt{x} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$.

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(2n+1)}}$ 为条件收敛.

2. 证明由方程 $F(z-ax, z-by)=0$ 确定的函数 $z=z(x, y)$ 应满足 $\frac{1}{a} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.