

高数下综合 (2)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的偏导数存在是它在该点处可微的 () 条件.

- A. 充分而不必要 B. 必要而不充分
C. 充要 D. 非充分非必要条件

2. 连续曲线 $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ ($0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$), 直线 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 ().

- A. $\pi \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]^2 dx$ B. $\pi \int_a^b [\psi^2(x) - \varphi^2(x)] dx$
C. $\pi \int_a^b [\varphi^2(x) - \psi^2(x)] dx$ D. $\int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx \cdot (b - a)$

3. 下列级数中发散的是 ().

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$ D. $\frac{3}{5} - \frac{3^2}{5^2} + \frac{3^3}{5^3} - \frac{3^4}{5^4} + \frac{3^5}{5^5} - \dots$

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$ 的收敛域是 ().

- A. $[-4, 4)$ B. $(-4, 4)$
C. $(-4, 4]$ D. $[-4, 4]$

5. 微分方程 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ 的通解中所含独立常数的个数为 ().

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

二、填空 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} f(t^2) dt =$ _____.

2. 设 $z = \arctan \frac{y^2}{x}$, 则 $dz =$ _____.

3.反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx =$ _____.

4.设 $D = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, 则 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma =$ _____

5.交换积分次序: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy =$ _____.

三、解答题 (每小题 8 分, 共 56 分)

1. 求由曲线 $y = 2x - x^2$ 和直线 $x + y = 0$ 所围成平面图形的面积.

2. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 z + 2y^2 z^2 + y = 0$ 确定的函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 某厂为促销产品需作两种手段的广告宣传. 当广告费分别为 x, y 时 (单位:

万元), 销售量 $Q = \frac{200x}{x+5} + \frac{100y}{y+10}$, 若销售产品所得利润 $L = \frac{1}{5}Q - (x+y)$, 两种

手段的广告费共 25(万元), 问如何分配两种手段的广告费才能使利润最大?

4. 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=y^2$ 围成的区域.

5. 求方程 $4y'' + 4y' + y = 0$ 的通解, 以及满足条件 $y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 0$ 的特解.

6. 解微分方程 $y' + 3y \tan 3x = \sin 6x$.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 2^n}$ 的收敛半径和收敛域.

四、证明（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, 其中 f 可微, 求证: $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

2. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ 绝对收敛.

仅供个人练习使用