

计算机学院 2012 级通信工程、软件工程《高等数学》A 卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 3 2. $2\cos 2x$ 3. $9xe^{3x}$ 4. $f(x) > f(0)$ 5. 充要

二、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. D 2. A 3. B 4. B 5. B 6. B 7. B 8. D

三、解答题（第 1 小题 12 分，第 2-8 题每小题 7 分，共 61 分）

1. (1) 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2n^2 + 1} \right)^{\frac{2n^2 + 1}{2}} \right]^{\frac{2(n^2 + 1)}{2n^2 + 1}} = e.$

(2) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{xe^{2x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = 2$

2. 由曲线 $y = x^3 + bx^2 + cx$ 通过点 $(-1, -4)$, 得 $b = c - 3 \cdots (1)$

$\because y' = 3x^2 + 2bx + c, \therefore y'|_{x=1} = 3 + 2b + c$

从而曲线在 $x = 1$ 处的切线斜率为 $k = 3 + 2b + c$.

由已知得 $3 + 2b + c = 0 \cdots (2)$

由(1),(2)得 $b = -2, c = 1$.

所以, 曲线的方程为 $y = x^3 - 2x^2 + x$

3. $\because \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$,

从而 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$

又 $\because \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ 不存在,

$\therefore f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续...

4. 方程两边求导数得: $2y' - 1 = (1 - y') \ln(x - y) + (x - y) \frac{1 - y'}{x - y}$

$$\Rightarrow y' = \frac{2 + \ln(x-y)}{3 + \ln(x-y)} \Rightarrow dy = \frac{2 + \ln(x-y)}{3 + \ln(x-y)} dx.$$

$$5. \text{ 原式} = \frac{1}{2} \int e^x (1 - \cos 2x) dx = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int e^x \cos 2x dx &= \int \cos 2x de^x = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \int \sin 2x de^x \\ &= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$\text{从而, 原式} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$6. \text{ 令 } \sqrt{e^t - 1} = u \Rightarrow t = \ln(1 + u^2) \Rightarrow dt = \frac{2u}{1 + u^2} du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \int \frac{1}{1 + u^2} du = 2 \arctan u + C = 2 \arctan \sqrt{e^t - 1} + C$$

$$\therefore \int_x^{2 \ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = 2 [\arctan \sqrt{e^t - 1}]_x^{2 \ln 2} = \frac{2\pi}{3} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \arctan \sqrt{e^x - 1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{e^x - 1} = 1 \Rightarrow x = \ln 2$$

$$7. f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	—	—
$f''(x)$	—	—	—	0	+
$f(x)$	增、凸	极小值点	减、凸	拐点	减、凹

单调增区间 $(-\infty, 1]$; 单调减区间 $[1, +\infty)$; 极大值 $= f(1) = \frac{1}{e}$; 拐点为 $(2, \frac{2}{e^2})$

$$8. \text{ 由 } \begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = 2x \end{cases} \text{ 得交点坐标为 } (1, 2), (-3, -6).$$

图形的面积 $A = \int_{-3}^1 [(3 - x^2) - 2x] dx = \frac{32}{3}$.