

期末模拟练习 (一)

一、选择题

1. 方程 $y' - y = 0$ 的通解为 ().

- (A) $y = e^x$ (B) $y = e^{Cx}$ (C) $y = Ce^x$ (D) $y = e^x + C$

2. 下列等式中, 正确的等式是 ().

- (A) $\vec{i} + \vec{j} = \vec{k}$ (B) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k}$ (C) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j}$ (D) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{i}$

3. 函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处不连续, 则 ().

- (A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 必不存在 (B) $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 必不可微

- (C) $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 必无定义 (D) $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 必不存在

4. 设 L 是连接 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 两点的线段与两坐标轴围成的三角形边界一周,

则 $\int_L ds = ().$

- (A) $3 + \sqrt{2}$ (B) $2 + \sqrt{2}$ (C) $5 + \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

5. 下列级数条件收敛的是 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{5}{3})^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{7^n}$

二、填空题

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $z = xy^2 + \frac{x}{y}$, 那么 $dz|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 曲线 $x = \cos t, y = e^t, z = 2t^2 + 1$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程为 .

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 方程 $y'' - 2y' = 0$ 的通解是 .

三、解答题

1. 求过点 $(-1, 2, 3)$, 垂直于直线 $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+3}{6}$ 且平行于平面

$7x + 8y + 9z - 5 = 0$ 的直线方程.

2. 设 $z = f(x^2y, y^2, y \sin x)$ 为可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$

3. 计算 $\int_L (x^2 + 1 - e^y \sin x) dy - e^y \cos x dx$, 其中 L 为半圆 $x = \sqrt{1 - y^2}$ 上从

$A(0, -1)$ 到 $B(0, 1)$ 的一段弧.

4. 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中 D 由 $x = 2, y = x$ 及 $xy = 1$ 围成.

5. 验证 $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$ 是 xoy 平面内某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求这样的一个 $u(x, y)$.

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ 的收敛域, 并在收敛域内求出其和函数.

7. 计算曲线 $y = 0, y = \ln x, x = e$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

四、证明题

1. 设 $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 试证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的偏导数存在,

但不连续.

2. 设 $z = xy + xF(u), u = \frac{y}{x}, F(u)$ 可导, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.