教材 P163.

1. 在R^4中求下列向量α与β的夹角.

(1) $\alpha=(2,1,3,2)$ $\beta=(1,2,-2,1)$ (3) $\alpha=(1,1,1,2)$, $\beta=(3,1,-1,0)$

解：向量α与β的夹角为 $\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

(1) $(\alpha,\beta)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0$.

$\therefore \theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

(3) 因 $(\alpha,\beta)=18$. $\|\alpha\|=3\sqrt{2}$ $\|\beta\|=6$

$\therefore \theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\arccos\frac{18}{3\sqrt{2}\times6}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

2. 在R^4中求一个与$\alpha_1=(1,1,-1,1)$, $\alpha_2=(1,-1,-1,1)$, $\alpha_3=(2,1,1,3)$正交的单位向量α.

解：设$\alpha_0=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4$，由题知$\alpha_0$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交，即

$(\alpha_0,\alpha_i)=0$, $i=1,2,3$. 则有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

对线性方程组的系数矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\2&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&0\\0&-1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\ r_1+(-1)r_2}]{(-\frac{1}{2})r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&3&1\end{pmatrix}$$

$\therefore x_2=0$, 取 $x_3=1$, 则 $x_4=-3$, $x_1=4$

$\therefore \alpha_0=(4,0,1,-3)$，故所求单位向量$\alpha$为：

$$\alpha=\pm\frac{1}{\|\alpha_0\|}\alpha_0=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3).$$

5. 用施密特正交化方法将下列向量组分别标准正交化.

(1) $\alpha_1=(1,1,1)$ $\alpha_2=(1,2,3)$. $\alpha_3=(1,4,9)$

解：先正交化：

令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,0,1)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{1}{3}(1,-2,1)$$

答 题 线

再由公式 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$ $(i=1,2,3)$ 得到标准正交向量组为：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).$$

(2) $\alpha_1 = (1,0,-1,1)$, $\alpha_2 = (1,-1,0,1)$, $\alpha_3 = (-1,1,1,0)$

解：先正交化，有

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1,0,-1,1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{3}(1,-3,2,1)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = \frac{1}{5}(-1,3,3,4)$$

再利用单位化公式 $\gamma_i = \frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i$ $(i=1,2,3)$ 得到

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1),\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,2,1),\ \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}(-1,3,3,4)$$

（说明：将向量正交化、单位化过程中涉及到的计算每一步务必仔细，如果有一个数据错误，整个最后的结果亦必然错误。）.

6. 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是 R^3 的一组标准正交基，证明向量组

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3),\ \alpha_2 = \frac{1}{3}(2\gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_3),\ \alpha_3 = \frac{1}{3}(\gamma_1 - 2\gamma_2 - 2\gamma_3)$$

也是 R^3 的一组标准正交基。

解：考虑向量组的列向量形式写现，则由矩阵的乘法可知

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)A,$$

这里 $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ [说明：灵活对矩阵乘法的运用、活用]

经计算知：$AA^T = A^TA = I$.

$\therefore A$ 为正交矩阵.

$\therefore$ 正交矩阵的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是标准正交的，且与 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 等价.

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也是 R^3 的一组标准正交基。

7. 设 A、B 是同阶正交矩阵，证明 AB 也是正交矩阵。

证明：$\because$ A、B 是正交矩阵，

$\therefore \quad AA^T = A^TA = I$,
$\qquad BB^T = B^TB = I$

$\therefore (AB)(AB)^T = ABB^TA^T = AIA^T = AA^T = I$
$\quad (AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TIB = B^TB = I$

$\therefore \ (AB)(AB)^T = (AB)^T(AB) = I$

$\therefore$ AB 也是正交矩阵。

11. 设 A 是奇数阶正交矩阵且 $|A| = 1$，证明 $\lambda=1$ 是 A 的特征值。

证明：（欲证 $\lambda=1$ 是矩阵 A 的特征值，即证明当 $\lambda=1$ 时 的特征多项式

$|\lambda I - A| = 0$.）

即只需证明 $|I - A| = 0$.

$\because \ AA^T = A^TA = I$. 注 ← 量考虑 A 的阶数为 n，n 为奇数

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad |I - A| &= |AA^T - A| \\
&= |A(A^T - I)| \\
&= |A|\,|A^T - I| \\
&= |(A - I)^T| \\
&= |A - I| \\
&= |(-1)(I - A)| \\
&= (-1)^n |I - A| \\
&= -|I - A|
\end{aligned}
$$

$\therefore |I - A| = 0$

$\therefore \lambda = 1$ 是矩阵 A 的特征值。