

大学物理习题集（下册）

参考答案与详细解析

覆盖练习一至练习二十：静电场、静电场中的导体与电介质、恒稳磁场、洛伦兹力、电磁感应、互感、自感、磁场能量以及麦克斯韦方程组。

编排形式：答案速查 + 规范步骤 + 关键公式 + 最终结论

适合打印、复习与自行使用 XeLaTeX 编译

目录

总答案速查	2
常用结论汇总	50

练习一

库仑定律与电场强度

一、选择题

1. **答案：D。** 试验电荷必须同时满足“电量足够小”和“体积足够小”：前者保证不显著扰动原电荷分布，后者保证它可代表空间中的一点。
2. **答案：B。** 当场点无限接近真实带电体时，点电荷模型失效，不能机械地由 $E \propto 1/r^2$ 推出实际场强发散。
3. **答案：A。** 电偶极子是两个等量异号点电荷组成的系统，并且两电荷间距远小于所研究的场点距离。
4. **答案：D。** 式 $E = f/q_0$ 是定义式；电场由场源电荷决定，不由试验电荷的取值决定。
5. **答案：C。** 静电力满足叠加原理。加入第三个电荷后， q_2 对 q_1 的作用力 f_{12} 不变，但 q_1 所受合力增加了第三个电荷的贡献。

二、填空题

1. 取 OP 为参考方向。无限长直线在 P 点产生的场强为

$$E_\lambda = \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 a},$$

其沿 OP 的分量为 $E_\lambda \cos 60^\circ$ ；均匀带电球在外部等效为点电荷：

$$E_Q = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

要求合场垂直于 OP ，两者沿 OP 的分量必须抵消，故

$$E_Q = E_\lambda \cos 60^\circ \implies \boxed{|Q| = |\lambda|a}.$$

因此

$$\boxed{\lambda = -\frac{Q}{a}},$$

λ 与 Q 为异号电荷。

2. 在同一点分别放入 $+q$ 和 $-q$ 时，电场力方向相反而大小相同：

$$\boxed{E = \frac{f_1}{q} = \frac{f_2}{q}}, \quad f_1 = f_2.$$

3. 设剩余圆环的线密度为

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R - d}.$$

完整圆环在圆心的场强为零, 因此带缺口圆环的场等于“缺失短弧”所产生场的反向。由 $d \ll R$, 缺口可近似看作电量 λd 的小电荷元, 故

$$E \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(2\pi R - d)R^2} \simeq \frac{qd}{8\pi^2\epsilon_0 R^3}.$$

方向由圆心指向缺口。

三、计算题

1. 半圆弧的线电荷密度为 $\lambda = Q/(\pi R)$ 。设半圆位于上半平面, 取极角为 θ , 则

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta.$$

水平方向分量相互抵消, 竖直分量同向:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

因此

$$E = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2},$$

方向沿半圆对称轴指向直径一侧, 即背离带电半圆弧。

2. 圆环上微元电量

$$dq = \lambda R d\varphi = \lambda_0 R \sin \varphi d\varphi.$$

圆心处

$$d\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}).$$

积分得

$$E_x = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0,$$

$$E_y = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}.$$

故

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \mathbf{j}.$$

练习二

电场强度（续）与高斯定理

一、选择题

1. **答案：A。**同一点的场强不因试验电荷取正或负而改变，因此 $f_1/q = E = f_2/q$ 。
2. **答案：A。**球面上场强大小相等，但方向沿各点径向而不同，所以场强矢量并非处处相等。
3. **答案：B。**电力线上每一点的切线方向与该点场强方向一致；电力线不能相交，且粒子轨迹通常不等同于电力线。
4. **答案：A。**用底面封闭半球面。闭合面内无电荷，故曲面通量等于底面通量的相反数。底面法向分量为 $E \sin 30^\circ$ ，得到 $\Phi = \pi R^2 E/2$ 。
5. **答案：D。**每块板只受另一块板产生的场作用。另一板的场为 $E = q/(2\varepsilon_0 S)$ ，故

$$F = qE = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

二、填空题

1. 在 P_1 处，两条带电线产生的场均向右：

$$E_{P_1} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d}.$$

在 P_2 处， $+\lambda$ 线距其 $3d$ ， $-\lambda$ 线距其 d ：

$$E_{P_2} = \frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_0 d} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} = -\frac{\lambda}{3\pi\varepsilon_0 d}.$$

负号表示方向向左。

2. 圆盘面密度 $\sigma = Q/(\pi R^2)$ 。半径为 r 、宽为 dr 的细环满足

$$dS = 2\pi r dr, \quad dq = \sigma dS = \frac{2Qr}{R^2} dr.$$

它在轴线上距圆心 x 处产生

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

3. 以袋口平面补成闭合面。闭合面内无电荷，故总通量为零。按题图法向与电场方向，袋口平面通量为 $ES_0 \sin \theta$ ，所以袋形曲面通量为

$$\Phi_{S'} = -ES_0 \sin \theta.$$

若改变所取法向，整体符号同时反向。

三、计算题

1. 将半圆柱面分割成与轴平行的无限长细直线。单位轴长总电量为 λ ，故角密度为 λ/π ：

$$d\lambda = \frac{\lambda}{\pi} d\theta.$$

每条细线在轴上产生

$$dE = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

对称方向分量抵消，沿半圆柱对称轴的分量叠加：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi^2\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta.$$

故

$$E = \frac{\lambda}{\pi^2\epsilon_0 R},$$

方向由带电半圆柱面指向未带电的开口一侧。

2. 圆平面在点电荷处所张立体角为

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right).$$

点电荷的总通量 q/ϵ_0 均匀分配到 4π 立体角，因此通过圆面的通量大小为

$$\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right).$$

符号由所选圆面法向决定。

练习三

高斯定理（续）、静电场力的功与环路定理

一、选择题

1. **答案：C。**圆柱面内部场强为零，外部满足 $E \propto 1/r$ ，对应无限长均匀带电圆柱面。
2. **答案：D。**由高斯定理，闭合面通量为零只说明面内净电荷代数和为零。
3. **答案：A。**用 8 个相同立方体拼成以电荷为中心的大立方体，总通量为 q/ϵ_0 。每个小立方体分得 $1/8$ ，其三个外表面再等分，故一个指定外表面的通量为 $q/(24\epsilon_0)$ 。
4. **答案：B。**闭合面通量非零说明面内净电荷非零，但面上个别点的场强仍可能为零。
5. **答案：D。**只要高斯面内净电荷非零，通过该面的总通量就必定非零。

二、填空题

1. 球面只包围位于 O 点的电荷，因此

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

在 a 点，两电荷产生的场同向：

$$\mathbf{E}_a = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (3R)^2} \right) \mathbf{r}_0 = \frac{5Q}{18\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{r}_0.$$

在 b 点，两电荷距该点均为 R ，场强方向相反且大小相等：

$$\mathbf{E}_b = 0.$$

2. 电偶极子势能为 $U = -pE \cos \alpha$ 。转过 180° 后

$$U_f = -pE \cos(\alpha + \pi) = pE \cos \alpha.$$

电场力作功

$$A = U_i - U_f = -2pE \cos \alpha.$$

3. 图中闭合面包围 q_2 和 q_4 ，故

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_2 + q_4}{\epsilon_0}.$$

但面上任一点的总场强是全部电荷共同产生的：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4.$$

三、计算题

1. 取平板中面为 $x = 0$ 。由平面对称性，场强垂直平板。对面积为 S 的柱形高斯面：

$$2ES = \frac{\rho(2|x|)S}{\varepsilon_0} \quad (|x| \leq d/2).$$

因此

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} \mathbf{i}, \quad |x| \leq \frac{d}{2}.$$

在板外，高斯面包围全部厚度 d ：

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn}(x) \mathbf{i}, \quad |x| \geq \frac{d}{2}.$$

2. 用叠加法：原带电实心球加上以 O' 为球心、密度为 $-\rho$ 的小球。

在空腔中心 O' ，负电小球自身场强为零，原大球场强为

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{OO'}.$$

图中 P 在 O 的另一侧， $OP = d$ ，故 $O'P = 2d$ 。大球在 P 点产生的场沿 $O \rightarrow P$ ：

$$E_+ = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}.$$

挖去的小球对外点等效为位于 O' 的负点电荷，产生大小

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(4\pi a^3/3)}{(2d)^2} = \frac{\rho a^3}{12\varepsilon_0 d^2},$$

方向与 $O \rightarrow P$ 相反。故

$$\mathbf{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(d - \frac{a^3}{4d^2} \right) \mathbf{e}_{OP}.$$

练习四

电势及场强与电势的关系

一、选择题

1. **答案：B。**完整均匀球面在球心的场强为零。移去 $+x$ 方向的小面元，相当于叠加一个负面元，故球心场强指向 $+x$ ；剩余电势仍为正，并按剩余电量比例减少。
2. **答案：C。**由 $E = -\nabla U$ ，电势梯度绝对值越大，场强大小越大。
3. **答案：D。**以 P 为零电势点，

$$U_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2a)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

4. **答案：B。**四点在同等势圆周上，故从 A 移到 B, C, D 的电势差均为零，电场力作功均为零。
5. **答案：A。**沿电力线方向电势降低；对负电荷 $U_p = qU$ ，因此其电势能反而增加。

二、填空题

1. 点 b 到 q_1, q_3 的距离均为 $\sqrt{2}R$ ，到 q_2 的距离为 $2R$ ，故

$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{q_1 + q_3}{\sqrt{2}} + \frac{q_2}{2} \right).$$

2. 若某区域电势为恒量，则

$$\boxed{E = 0}.$$

若电势为空间坐标的一次函数，则其梯度为常矢量，因而该区域为

$$\boxed{\text{匀强电场}}.$$

3. 令 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ 。由图中 $AB = BO = OD = R$ ，

$$U_B = k \left(\frac{q}{R} - \frac{q}{R} \right) = 0,$$

$$U_D = k \left(\frac{q}{3R} - \frac{q}{R} \right) = -\frac{2kq}{3R}.$$

单位正电荷从 B 到 D 时电场力作功

$$\boxed{A = U_B - U_D = \frac{2kq}{3R} = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}}.$$

三、计算题

1. 线密度为 $\lambda = q/(2l)$ 。以靠近 P 的杆端为积分起点，杆元到 P 的距离从 a 变化到 $a + 2l$ ：

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+2l} \frac{\lambda dx}{x}.$$

故

$$U_P = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{a+2l}{a}.$$

2. 空腔内任一点到各球壳元距离虽不同，但每个薄球壳在其内部产生的电势为常量。半径为 r 、厚度为 dr 的薄壳电量为 $dq = 4\pi r^2 \rho dr$ ，其内部电势

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{\rho r}{\epsilon_0} dr.$$

积分得

$$U = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2).$$

空腔内电势处处相同，场强为零。

练习五

静电场中的导体

一、选择题

1. **答案：E。**空腔内和导体材料内部的总场强均为零，但外部点电荷 Q 本身在这些位置产生的场并非不存在，只是被感应电荷产生的场抵消。
2. **答案：C。**球心处的 q_1 使内表面感应电荷均匀分布，对球心合力为零；外部 q_2 的直接作用由外表面感应电荷的作用完全抵消，故总力为零。
3. **答案：B。**接地导体靠近正带电体时，电子由大地流入导体，导体带负电。
4. **答案：A。**外球壳带负电使内球处电势降低；内球接地后由大地流入正电量，使其电势恢复为零。
5. **答案：D。**静电平衡导体表面外侧总场强满足 $E_n = \sigma/\varepsilon_0$ ，它已包含外部点电荷和全部感应电荷的共同作用。

二、填空题

1. 连接后两球等势且总电量守恒：

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2}, \quad Q_1 + Q_2 = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}.$$

由 $r_1 : r_2 = 1 : 2$,

$$Q_1 = 6.67 \times 10^{-9} \text{ C}, \quad Q_2 = 1.33 \times 10^{-8} \text{ C}.$$

两球电势均为

$$U_1 = U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} \simeq 6.0 \times 10^3 \text{ V}.$$

2. 导体表面外侧 $E = \sigma/\varepsilon_0$ 。场强向下表示表面电荷为负：

$$\sigma = -\varepsilon_0 E = -8.85 \times 10^{-10} \text{ C/m}^2,$$

地面带**负电**。

3. 设四个表面的面密度依次为 $\sigma_{AL}, \sigma_{AR}, \sigma_{BL}, \sigma_{BR}$ 。利用两导体内部场强为零以及每块板的总电量条件，得到

$$\sigma_{AL} = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_{AR} = \frac{Q}{2S},$$

$$\sigma_{BL} = -\frac{Q}{2S}, \quad \sigma_{BR} = \frac{Q}{2S}.$$

三、计算题

1. 设 A 与 C 间场强为 E_1 , C 与 B 间场强为 E_2 , 方向均取向下。由电势差

$$U_0 - U_C = E_1 \frac{2d}{3}, \quad U_C = E_2 \frac{d}{3}.$$

导体板 C 上下表面电荷分别为 $-\varepsilon_0 E_1$ 和 $+\varepsilon_0 E_2$, 故

$$\frac{Q}{S} = \varepsilon_0 (E_2 - E_1).$$

代入 E_1, E_2 解得

$$U_C = \frac{U_0}{3} + \frac{2Qd}{9\varepsilon_0 S}.$$

2. 均匀带电直线在球心处的外加电势为

$$U_{\text{ext}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_d^{d+2l} \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d+2l}{d}.$$

中性孤立导体球的电势等于外电势在球心的值, 因此

$$U = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d+2l}{d}.$$

接地后要求总电势为零。球上净感应电量 Q' 产生的常量电势为 $Q'/(4\pi\varepsilon_0 R)$, 故

$$\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R} + U_{\text{ext}} = 0,$$

从而

$$Q' = -\lambda R \ln \frac{d+2l}{d}.$$

断开接地线后, 该净电量保持不变。

练习六

静电场中的电介质

一、选择题

- 答案：D。**关系 $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ 只适用于线性各向同性电介质；定义式 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 对一般电介质均成立。
- 答案：C。**极化强度由介质性质和介质中的总电场共同决定，而总电场包含外加场和极化电荷产生的场。
- 答案：B。**高斯面 S 所包围的自由电荷仍为 Q ，故 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$ 。加入偏心介质球后不再具有球对称性，其他简单公式均不能直接使用。
- 答案：C。**电位移线起于正自由电荷、止于负自由电荷，且不会相交。
- 答案：A。** $\mathbf{D}$ 在某一点的值由空间中全部自由电荷和束缚电荷共同决定，但其闭合面积分只等于高斯面内自由电荷代数和。

二、填空题

- 正负电荷中心**重合**的分子称为无极分子；正负电荷中心**不重合**的分子称为有极分子。
- 有极分子**发生取向极化；**无极分子**主要发生位移极化。
- 束缚面电荷密度为

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha.$$

三、计算题

- 由球对称性和电介质中的高斯定理，分区域讨论。

当 $r < R_1$ 时，导体内部

$$\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{E} = 0.$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，球面包围自由电荷 Q ：

$$D 4\pi r^2 = Q,$$

故

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \mathbf{e}_r.$$

当 $r > R_2$ 时，外部为真空：

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.}$$

导体球电势为从 R_1 积分到无穷远：

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} \right]. \end{aligned}$$

即

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r R_1} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \frac{1}{R_2} \right].}$$

2. 设同轴圆筒单位长度带电量为 λ ，则介质中的场为

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}.$$

两圆筒间电压

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

因此不必显式求 λ ：

$$\boxed{E(R) = \frac{U}{R \ln(R_2/R_1)}}.$$

代入 $R_1 = 0.02 \text{ m}$ 、 $R_2 = 0.05 \text{ m}$ 、 $R = 0.035 \text{ m}$ 、 $U = 32 \text{ V}$ ：

$$\boxed{E_A \approx 9.98 \times 10^2 \text{ V/m}}.$$

A 点相对外筒的电势差为

$$U_A - U_{R_2} = \int_R^{R_2} E(r) dr = U \frac{\ln(R_2/R)}{\ln(R_2/R_1)},$$

故

$$\boxed{U_A - U_{R_2} \approx 12.46 \text{ V}}.$$

练习七

电容、恒稳电流与静电场能量

一、选择题

1. **答案：B。**串联时 $I_1 = I_2$ ，细棒截面小，故 $j_1 > j_2$ ；并联时两棒电压相同， $I \propto S$ ，所以 $I'_1 < I'_2$ ，但 $j' = I/S = U/(\rho l)$ 相等。
2. **答案：A。**由欧姆定律 $U = IR = 0.05 \times 800 = 40 \text{ V}$ 。
3. **答案：C。**电动势是标量，不是矢量；它可带正负号，但“方向”由规定的回路绕行方向表示。
4. **答案：B。**插入导体板后有效极板距离减小，故 C 增大。断开电源后 Q 不变，因此 $U = Q/C$ 和 $W = Q^2/(2C)$ 均减小；空隙中的场强 $E = \sigma/\varepsilon_0$ 不变。
5. **答案：D。**线性静电问题中 $E \propto \rho$ ，而场能 $W \propto E^2$ ，故电荷密度增大 2 倍时场能增大 4 倍。

二、填空题

1. 电容器断开电源后自由电荷不变，充满介质后

$$\boxed{E' = \frac{E}{\varepsilon_r}}, \quad \boxed{W' = \frac{W}{\varepsilon_r}}.$$

2. 由

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

得

$$E = \sqrt{\frac{2w_e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}.$$

原题给出 $w_e = 2 \times 10^6 \text{ J/cm}^3 = 2 \times 10^{12} \text{ J/m}^3$ ，故

$$\boxed{E \approx 3.36 \times 10^{11} \text{ V/m}}.$$

若题目单位本意为 J/m^3 ，则数值应为 $3.36 \times 10^8 \text{ V/m}$ 。

3. 平行板内 $E = U/d$ ，所以

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{U}{d} \right)^2}.$$

三、计算题

1. 与练习六第 2 题相同：

$$E_A = \frac{U}{R \ln(R_2/R_1)} \approx 9.98 \times 10^2 \text{ V/m},$$

$$U_A - U_{R_2} = U \frac{\ln(R_2/R)}{\ln(R_2/R_1)} \approx 12.46 \text{ V}.$$

2. 球上已有电荷 q 时，球面电势

$$U(q) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

把微元电荷 dq 从无穷远缓慢移到球面，外力作功

$$dA = U(q) dq = \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

从零充到 Q ：

$$A = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

这也就是带电导体球的静电能。

练习八

静电场习题课

一、选择题

1. **答案: B**。均匀带电球体的静电能为 $3Q^2/(20\pi\epsilon_0 R)$, 均匀带电球面的静电能为 $Q^2/(8\pi\epsilon_0 R)$, 前者较大。
2. **答案: A**。无限大导体板两侧对称位置的电势相同, 因此 $U_a - U_b = 0$ 。
3. **答案: B**。在内圆柱面内部 $E = 0$, 故电势为常量, 等于从 a 到接地外筒 b 的电势差: $U = \lambda \ln(b/a)/(2\pi\epsilon_0)$ 。
4. **答案: D**。能量守恒给出

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + mv^2,$$

故

$$v = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

5. **答案: C**。内、外球面处电势分别为

$$U_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} - \frac{3q}{2R} \right), \quad U_{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2q}{2R}.$$

所以粒子获得动能

$$K = Q(U_R - U_{2R}) = \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

二、填空题

1. 球面包围总电荷 λd :

$$\Phi_E = \frac{\lambda d}{\epsilon_0}.$$

在延长线交点 P 处, 设导线中点到 P 的距离为 R , 则

$$E_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R - d/2} - \frac{1}{R + d/2} \right),$$

即

$$E_P = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - d^2/4)}.$$

方向沿直线延长线**远离带正电直线**。

2. 电池保持连接时电压不变，而

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S \left(\frac{U}{d} \right)^2.$$

距离变为 $2d$ 后

$$F' = \frac{F}{4}.$$

3. 电力线从 A 发出并终止于 B ，所以 B 为负电荷；仍有部分电力线从 A 伸向无穷远，说明

$$|q_B| < Q.$$

三、计算题

1. 半径为 R 的均匀带电圆盘在轴线上距盘心 a 处的场强为

$$E_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right).$$

无限大平面的场强为 $E_\infty = \sigma/(2\varepsilon_0)$ 。题设 $E_R = E_\infty/2$ ，故

$$1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} = \frac{1}{2}.$$

于是

$$\sqrt{a^2 + R^2} = 2a, \quad R = \sqrt{3}a.$$

2. 当 $d \gg r_0$ 时，可把两导线近似看作电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 的线电荷。两导线表面的电势差近似为

$$U \simeq \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d}{r_0}.$$

故单位长度电容为

$$C' = \frac{\lambda}{U} \simeq \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r_0)}.$$

更精确的双圆柱结果为

$$C' = \frac{\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arcosh}(d/2r_0)}.$$

练习九

毕奥-萨伐尔定律

一、选择题

1. **答案：C。** 试验线圈既要足够小以代表一点，又要电流足够小以免扰动原磁场。
2. **答案：A。** 磁矩是矢量而非标量。
3. **答案：D。** 磁感应强度是磁场本身的性质，定义式中的 $M_{\max}$ 和 p_m 会随试验线圈同步变化。
4. **答案：A。** 两导线在原点产生的场强大小相等，方向分别沿 $+y$ 和 $+z$ ，合场位于 yz 平面并与 y 轴成 45° 。
5. **答案：E。** 试验线圈处于稳定平衡且磁力矩为零时，磁矩方向与 $\mathbf{B}$ 同向。

二、填空题

1. 电流元沿 $+x$ 。在 x 轴上， $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{r}$ ，故

$$B_a = 0.$$

在 y 、 z 轴上夹角均为 90° ：

$$B_b = B_c = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

其中 $\mathbf{B}_b$ 沿 $+z$ ， $\mathbf{B}_c$ 沿 $-y$ 。

2. 按图中电流沿 $+z$ 方向，中心轴线上方 P 点各细电流产生的横向分量相消，合场沿

$$x \text{ 轴负方向}.$$

3. 电子运动等效电流的大小为

$$I = \frac{ev}{2\pi r}.$$

圆心磁场大小

$$B = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}.$$

磁矩大小

$$p_m = I\pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$

电流方向和磁矩方向均与电子实际运动的右手螺旋方向相反。

三、计算题

1. 经过圆心的直导线段对圆心无贡献。两个半圆弧分别产生

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4R_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R_2}.$$

两半圆所在平面互相垂直，所以两场也互相垂直。按题图电流方向，可写成

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4R_2} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} \mathbf{k}.$$

因而大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4} \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}.$$

若重画坐标轴或改变图示观察方向，分量符号整体按右手定则调整。

2. 线圈匝数在半径方向均匀分布：

$$dN = \frac{N}{R_2 - R_1} dr.$$

半径为 r 的一匝在圆心产生

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2r} dN.$$

积分得

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

方向由右手螺旋定则确定。

练习十

毕奥-萨伐尔定律（续）、磁通量与磁场高斯定理

一、选择题

1. **答案：B。**由 $d\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi)I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}/r^3$ ，当 $d\mathbf{l} = dl\mathbf{k}$ 时， x 分量为 $-(\mu_0/4\pi)Iy dl/r^3$ 。
2. **答案：C。**两段半无限直线分别给出 $\mu_0 I/(4\pi R)$ 的 $+z$ 、 $+y$ 分量，半圆弧再给出 $\mu_0 I/(4R)$ 的 $+z$ 分量。
3. **答案：C。**三角形三边的电阻与边长成正比，分流后线框三边在中心产生的磁场恰好抵消， $B_3 = 0$ ；两条外接长直线产生的场不能抵消，所以总场不为零。
4. **答案：B。**由投影面积法，面 $AA'CO$ 的通量为 $-Bac$ ，面 $B'BOC$ 的通量为零，面 $AA'B'B$ 的通量为 $+Bac$ 。
5. **答案：D。**两导线的 z 分量相消， y 分量同向叠加，得到

$$\mathbf{B} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi a}\mathbf{j}.$$

二、填空题

1. 带正电粒子在速度沿 $+x$ 。在 x 轴上

$$\mathbf{B}(x_0) = 0.$$

在 y 轴上

$$\mathbf{B}(y_0) = \frac{\mu_0 qv}{4\pi y_0^2}\mathbf{k}.$$

2. 两个半圆弧方向相反，经过圆心的直线段无贡献，故

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4} \left| \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right|.$$

方向垂直于圆面，并由半径较小的半圆弧所产生磁场的方向决定。

3. 圆环两支路电阻与弧长成正比。短弧和长弧的电流分别为 $3I/4$ 和 $I/4$ ，它们在圆心产生的场大小相等、方向相反，恰好抵消。径向直线 1 无贡献，切向半无限直线 2 产生

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

三、计算题

1. 将 $1/4$ 圆柱面看作角度从 0 到 $\pi/2$ 的无限长细电流。电流均匀分布：

$$dI = \frac{2I}{\pi} d\theta.$$

轴线上每一细电流产生

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}.$$

对方向分量积分，得到两个互相垂直且大小相同的分量

$$|B_x| = |B_y| = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

故

$$B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

代入 $I = 10.0 \text{ A}$ 、 $R = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ：

$$B \approx 1.80 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

方向沿该四分之一圆弧角平分线的反方向，具体符号由图示象限和电流方向确定。

2. 距长直导线 r 处的场为

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

矩形长边 a 与导线平行，近边距导线 c ，宽为 b ，故磁通量

$$\Phi = \int_c^{c+b} B(r)a \, dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}.$$

因此

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}.$$

练习十一

安培环路定律

一、选择题

1. **答案：C。**环路积分只由穿过环路所围曲面的净传导电流决定，因此 I_2 在环外移动时积分不变；但 I_2 对点 P 的场会改变，所以 B_P 改变。
2. **答案：C。**按图中环路方向，闭合曲线与环形电流的链接数为 -2 ，故

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -2\mu_0 I.$$

3. **答案：A。**环路积分非零只说明沿环路的切向分量积分非零。环路上可以有个别点 $B = 0$ ，也可以处处不为零，但不可能处处均为零。
4. **答案：B。**在空腔内 $r < a$ 时 $B = 0$ ；在导体层 $a < r < b$ 中， B 从零连续增大；在外部 $r > b$ 时 $B \propto 1/r$ 下降。
5. **答案：D。**积分为零说明环路所包围传导电流的代数和为零，环路内可以没有电流，也可以有方向相反、代数和为零的电流。

二、填空题

1. 安培环路定律对有限长电流仍然成立，但由于磁场缺乏足够对称性，**不能仅靠安培环路定律直接求出各点场强**。若电流在圆柱截面上均匀分布，半径为 $r < R$ 的圆形环路包围电流

$$I_{\text{enc}} = I \frac{r^2}{R^2},$$

所以

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}.$$

2. 按图中各环路箭头规定正方向，用链接数写为

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_1,$$

$$\oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 - I_2),$$

$$\oint_{L_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I_1.$$

若把某一环路的绕行方向反向，相应表达式整体变号。

3. 环路上任一点的磁感应强度由空间中**全部电流** I_1, I_2 共同决定；而

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

只由穿过所选曲面的**净电流** I_1 决定。

三、计算题

1. 对半径为 a 、电流在截面上均匀分布的无限长圆柱导线，取同轴圆形安培环路。

当 $r < a$ 时，包围电流 $I_r = Ir^2/a^2$ ，故

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2},$$

于是

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}, \quad r < a.$$

当 $r \geq a$ 时，包围全部电流：

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r \geq a.$$

方向均沿以轴线为中心的圆周切向，由右手螺旋定则确定。

对图 11.5 中的两根平行导线，可建立横轴 x ，令导线 A 、 B 的轴分别位于 $x = 0$ 、 $x = d$ 。定义带符号的单根导线场函数

$$f(s) = \begin{cases} \frac{s}{a^2}, & |s| < a, \\ \frac{1}{s}, & |s| \geq a. \end{cases}$$

则横轴上坐标为 x 的点的合场为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [f(x) + f(x-d)] \mathbf{e}_\perp.$$

其中 $\mathbf{e}_\perp$ 为垂直于两轴所在平面的方向，正负号由括号内结果决定。故直接代入 $x = x_1, x_2, x_3$ 即得 P_1, P_2, P_3 的大小和方向。特别地，位于两导线之间时两场方向相反；位于两导线外侧时两场方向相同。

2. 设导体材料中的均匀电流密度为

$$J = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}.$$

把实际导体看成：以 O 为轴、半径 R_1 、电流密度 $+J$ 的实心圆柱，加上以 O' 为轴、半径 R_2 、电流密度 $-J$ 的圆柱。

在 O 点，大圆柱场为零；负电流圆柱在其外部距离 a 处的场大小为

$$B_O = \frac{\mu_0(J\pi R_2^2)}{2\pi a}.$$

所以

$$B_O = \frac{\mu_0 I R_2^2}{2\pi a(R_1^2 - R_2^2)}.$$

在 O' 点，负电流圆柱自身场为零；大圆柱内部距轴 a 处的场为

$$B_{O'} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(R_1^2 - R_2^2)}.$$

两者方向均平行于 $\mathbf{e}_z \times \overrightarrow{OO'}$ ，其中 $\mathbf{e}_z$ 沿电流方向。

练习十二

安培力与磁力矩

一、选择题

1. **答案：D**。长直导线的场为 $B = \mu_0 I_0 / (2\pi r)$ ，导线段上各点到长直导线的距离从 a 变到 $a + b$ ：

$$F = I \int_a^{a+b} B(r) dr = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

2. **答案：B**。与长直导线平行的近边和远边受力方向相反，近边场更强，故合力向下，大小为

$$F = \frac{\mu_0 I_0 I c}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right).$$

3. **答案：C**。电流元 1 在电流元 2 处产生的场含因子 $\sin \theta_1$ ；该场垂直于两电流元所在平面，因此与 $I_2 dl_2$ 垂直，安培力不再出现 $\sin \theta_2$ 。

4. **答案：A**。半径在 r 到 $r + dr$ 间的匝数为 $dN = dr/d$ ，磁矩

$$p_m = I \int_{R_1}^{R_2} \pi r^2 \frac{dr}{d} = \frac{\pi I (R_2^3 - R_1^3)}{3d}.$$

5. **答案：原题选项有漏印**。按图中电流方向，线圈磁矩与 z 轴夹角为 30° ，故

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2} I a^2 B \mathbf{j}.$$

四个选项均未同时给出“大小 $I a^2 B / 2$ 、方向 $-y$ ”。

二、填空题

1. 匀强磁场中任意形状载流导线所受合力可写为

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{B}.$$

弦 bc 的两个分量均为 a ，故弦长为 $\sqrt{2}a$ ，且与 $\mathbf{B}$ 垂直。因此

$$F = \sqrt{2} I a B.$$

2. S 是线圈所围的面积， $\mathbf{n}$ 是线圈平面的法向单位矢量。右手四指沿电流方向弯曲时，大拇指指向磁矩方向。

3. 线圈面积 $S = ab = 0.06 \text{ m}^2$, 磁矩 $p_m = IS = 0.30 \text{ A m}^2$ 。初始时线圈平面与磁场平行, 磁矩与磁场垂直:

$$M = p_m B = 0.15 \text{ N m}.$$

转到线圈平面与磁场成 30° 时, 磁矩与磁场成 60° 。磁势能由 0 变为 $-p_m B \cos 60^\circ$, 故磁力矩做功

$$A = \frac{1}{2} p_m B = 7.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

三、计算题

1. 圆盘面电荷密度

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}.$$

取半径为 r 、宽为 dr 的圆环, 电量

$$dq = 2\pi r \sigma dr.$$

其转动周期为 $2\pi/\omega$, 等效电流

$$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \sigma \omega r dr.$$

磁矩元

$$dp_m = \pi r^2 dI = \pi \sigma \omega r^3 dr.$$

积分得

$$p_m = \pi \sigma \omega \frac{R^4}{4} = \frac{Q \omega R^2}{4}.$$

因为 $p_m \perp B$,

$$M = p_m B = \frac{Q \omega R^2 B}{4}.$$

方向为

$$\mathbf{M} = p_m \times \mathbf{B},$$

其中 p_m 的方向由正电荷转动方向按右手定则确定。

2. 金属杆中的恒定电流为 I 。距转轴 r 的微元所受切向磁力

$$dF = IB dr,$$

对应磁力矩

$$d\tau = r dF = IB r dr.$$

因此总磁力矩

$$\tau_B = \frac{1}{2} I B a^2.$$

杆的转动惯量为 $J_O = ma^2/3$, M 点摩擦力为 $ka\omega$, 摩擦力矩为 $ka^2\omega$ 。运动方程

$$\frac{1}{3}ma^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}IBa^2 - ka^2\omega.$$

约去 a^2 , 结合 $\omega(0) = 0$:

$$\omega(t) = \frac{IB}{2k} (1 - e^{-3kt/m}).$$

若要使杆保持不动, M 点外加切向力 F 的力矩应抵消磁力矩:

$$Fa = \frac{1}{2}IBa^2.$$

故

$$F = \frac{1}{2}IBa,$$

方向与磁力驱动杆转动的方向相反。

练习十三

洛伦兹力与霍耳效应

一、选择题

1. **答案：B。**电子在磁场中的轨道半径 $r = p/(eB)$ 。由几何关系 $D = r \sin \alpha$ ，故

$$\alpha = \arcsin \frac{eBD}{p}.$$

2. **答案：C。**磁场力始终垂直速度，不做功，因此动能不变；但动量方向改变，所以动量矢量改变。
3. **答案：B。**图中只给出了轨迹形状，没有给出运动方向，因此粒子电荷可以同号也可以异号；半径不同也不能单独推出动量或周期必然不同。
4. **答案：A。**电子在匀强磁场中的回旋周期

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}$$

与速率无关，因此两电子同时回到出发点。

5. **答案：D。**两粒子的 $|q|/m$ 相同，故周期相同。由左手或洛伦兹力方向判断，负电荷 q_1 顺时针，正电荷 q_2 逆时针。

二、填空题

1. 螺旋运动的垂直分速度为

$$v_{\perp} = \frac{eBR}{m_e},$$

平行分速度为

$$v_{\parallel} = \frac{h}{T} = \frac{heB}{2\pi m_e}.$$

代入 $B = 2.0 \times 10^{-3} \text{ T}$ 、 $R = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、 $h = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ：

$$v_{\perp} \approx 7.03 \times 10^6 \text{ m/s}, \quad v_{\parallel} \approx 2.80 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

因此

$$v \approx 7.56 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

按图示电子旋向，磁场沿螺旋轴线**向左**；若把图中观察方向反向，应用电子带负电这一点重新按洛伦兹力判断。

2.

$$\mathbf{v} = (0.50 \times 10^6 \mathbf{i} + 1.0 \times 10^6 \mathbf{j}) \text{ m/s},$$

$$\mathbf{B} = (0.40 \mathbf{i} - 0.20 \mathbf{j}) \text{ T}.$$

有

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -5.0 \times 10^5 \mathbf{k}.$$

电子电量为 $-e$, 故

$$\mathbf{F} = 8.0 \times 10^{-14} \mathbf{k} \text{ N}.$$

3. 由 $evB = mv^2/R$:

$$B = \frac{m_e v}{eR} \approx 9.11 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

三、计算题

1. 霍耳场满足 $E_H = v_d B$, 横向电压为 $U_H = E_H w$. 取导体宽度 $w = 1.0 \text{ cm} = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$:

$$v_d = \frac{U_H}{Bw} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{1.5 \times 10^{-2}} = 6.67 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

导体横截面积

$$A = wt = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-5}) = 1.0 \times 10^{-7} \text{ m}^2.$$

由 $I = nev_d A$:

$$n = \frac{I}{ev_d A} \approx 2.81 \times 10^{29} \text{ m}^{-3} = \boxed{2.81 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}}.$$

若载流子为电子, 电子漂移方向与常规电流相反。霍耳电场方向由

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$$

确定; 电子所聚集的一侧电势较低, 另一侧电势较高。作图时先标出常规电流方向, 再把电子漂移方向取反, 最后用 $-\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ 判断电子偏转侧。

2. 初速度分解为

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha.$$

垂直分量使电子作圆周运动, 周期

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

平行分量使电子沿磁场方向匀速前进, 每转一周前进的螺距为

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m_e v_0 \cos \alpha}{eB}.$$

若

$$L = nh = \frac{2\pi m_e n v_0 \cos \alpha}{eB}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则电子恰好完成 n 个完整回旋，横向坐标恢复到初始值，同时沿磁场前进距离 L ，故恰好到达 O 点。

练习十四

静磁场中的磁介质

一、选择题

1. **答案：C。** 顺磁质 $\mu_r > 1$ ，抗磁质 $\mu_r < 1$ 且接近 1，铁磁质通常 $\mu_r \gg 1$ 。
2. **答案：C。** $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ 是定义式，适用于一般介质； $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 只适用于线性各向同性介质。
3. **答案：B。** 磁化强度由介质本身性质和介质中的总磁场共同决定，总磁场包含外加场与磁化电流产生的场。
4. **答案：A。** $\mathbf{H}$ 的局部值受全部自由电流及磁化状态影响，但 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 只等于环路所包围的自由传导电流。
5. **答案：D。** 若闭曲线上各点 $H = 0$ ，则环路积分必为零，所以所包围的自由电流代数和必为零。

二、填空题

1. 磁介质 1 的磁滞回线宽、矫顽力大，适合制造**永久磁铁**；磁介质 2 的回线窄、磁滞损耗小，适合制造**变压器铁芯**。

2.

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{500 \times 0.3}{0.50} = \boxed{300 \text{ A/m}}.$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \times 10^{-7} \times 600 \times 300 \approx \boxed{2.26 \times 10^{-1} \text{ T}}.$$

3. 图中 a 曲线显著高于真空直线且呈强非线性，代表**铁磁质**； b 略高于真空直线，代表**顺磁质**； c 略低于真空直线，代表**抗磁质**。

三、计算题

1.

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2.0 \times 10^{-6}}{1.0 \times 10^{-4}} = 2.0 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

环形铁芯中的

$$H = \frac{NI}{L} = \frac{300 \times 32 \times 10^{-3}}{0.30} = 32 \text{ A/m}.$$

因此

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 497.36,$$

磁化率

$$\chi_m = \mu_r - 1 \approx 496.36.$$

2. 取与电缆同轴的圆形安培环路。设电流沿内导体轴向为正。

当 $0 < r < R_1$ 时，包围电流 $I r^2 / R_1^2$ ：

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}.$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，环路处于磁导率为 μ 的介质中并包围全部去程电流：

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}.$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时，外导体回流电流在其截面上均匀分布。包围净电流为

$$I_{\text{enc}} = I - I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}.$$

故

$$B(r) = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}.$$

当 $r > R_3$ 时，去程和回程电流代数和为零：

$$B(r) = 0.$$

各区域方向均为绕轴切向，由右手螺旋定则确定。

练习十五

静磁场习题课

一、选择题

1. **答案：B。**地磁场在赤道附近近似水平指向北方。质子沿西向运动时， $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 竖直向下，可作为沿地球赤道圆周运动所需的向心力。
2. **答案：A。**在电流方向固定时， $q\mathbf{v}_d = \mathbf{j}/n$ 与载流子正负无关，因此载流子所受磁力方向不变；但霍尔场 $\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ 随载流子符号改变，所以霍尔电压极性改变。
3. **答案：C。**载流子磁力方向和导线整体所受安培力方向都由 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 决定，与载流子正负无关。
4. **答案：D。**公式把导线视为无限细直线；在 r 与导线横向尺寸同量级时，必须考虑真实电流分布。
5. **答案：D。**稳恒电流必须构成闭合回路；安培环路积分中的净电流必须穿过环路所围曲面。

二、填空题

1. 电子的运动周期 $T = 2\pi/\omega$ ，等效电流大小

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}.$$

轨道磁矩大小

$$p_m = I\pi r^2 = \frac{1}{2}e\omega r^2.$$

方向与电子轨道角动量相反。

2. 金属中的主要载流子为电子。 $\mathbf{B}$ 沿 $-x$ ，常规电流沿 $+y$ ，电子漂移沿 $-y$ 。由

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$$

得

$$\mathbf{E}_H \text{ 沿 } +z \text{ 方向}.$$

3. 圆环总电量 $Q = 2\pi R\lambda$ ，等效电流

$$I = \frac{Q\omega}{2\pi} = \lambda R\omega.$$

磁矩大小

$$p_m = I\pi R^2 = \pi\lambda\omega R^3.$$

图中磁矩与外磁场垂直，因此

$$M = \pi\lambda\omega R^3 B.$$

方向为

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}.$$

三、计算题

1. 电流脉冲作用时间很短，可忽略该阶段重力冲量。磁力大小 $F = Bli$ ，故磁力冲量

$$J = \int F dt = Bl \int i dt = Blq.$$

导线获得初速度

$$mv_0 = Blq.$$

随后导线上升到高度 h ，由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh, \quad v_0 = \sqrt{2gh}.$$

所以

$$q = \frac{m\sqrt{2gh}}{Bl}.$$

代入 $B = 0.1 \text{ T}$ 、 $m = 1.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 、 $l = 0.2 \text{ m}$ 、 $h = 0.3 \text{ m}$ ：

$$q \approx 1.21 \text{ C}.$$

2. 载流面两侧自场大小相等、方向相反。设原匀强场大小为 B_0 ，载流面自场大小为 B' ，并假设图中 $B_1 > B_2$ ，则

$$B_1 = B_0 + B', \quad B_2 = B_0 - B'.$$

故

$$B_0 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad B' = \frac{B_1 - B_2}{2}.$$

无限大面电流满足 $B' = \mu_0 j/2$ ，所以

$$j = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0}.$$

单位面积所受力只应使用外加场 B_0 ：

$$\frac{F}{S} = jB_0 = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0}.$$

方向由 $\mathbf{j}_s \times \mathbf{B}_0$ 决定；按题图为 $-y$ 方向。若实际 $B_2 > B_1$ ，上述大小取绝对值，方向反向。

练习十六

电磁感应定律与动生电动势

一、选择题

1. **答案：D**。按图中规定的正绕向，线圈正法向指向左方。N 极靠近时，穿过线圈、指向右方的磁通量绝对值增大，因此正磁通量减小， $d\Phi/dt < 0$ 。由法拉第定律 $\varepsilon = -d\Phi/dt$ ，故 $\varepsilon > 0$ 。
2. **答案：C**。按图示磁铁运动和线圈绕向，用楞次定律判断线圈靠近磁铁的一端应形成同名磁极以阻碍靠近，因此螺线管内电流由 B 流向 A；外电路中电流由 A 流向 B，故 $U_A > U_B$ 。
3. **答案：A**。长直螺线管内 $B = \mu_0 n I$ 。测量线圈翻转前后每匝磁通由 BA 变为 $-BA$ ，总磁通链变化量为 $2NBA$ ，通过导线截面的电量

$$\Delta q = \frac{|\Delta(N\Phi)|}{R} = \frac{2\mu_0 n I N A}{R}.$$

4. **答案：D**。两环所包围磁通变化率相同，故感应电动势相同；铁环和铜环电阻不同，因此感应电流不同。
5. **答案：D**。线圈磁通量

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r+l}{r}.$$

随 r 增大，磁通量减小，感应电流应维持原来垂直纸面向里的磁通，故电流为顺时针 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ 。大小

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I v l^2}{2\pi r(r+l)}.$$

二、填空题

1. 导线扫过面积的速率为 $lv \sin \theta$ ，故

$$\varepsilon = Blv \sin \theta.$$

正电荷受 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 作用沿导线由 a 指向 b ，因此

$$U_a < U_b.$$

若回路总电阻为 R ，则

$$I = \frac{Blv \sin \theta}{R}, \quad P = I^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2 \sin^2 \theta}{R}.$$

2. 棒绕 D 转动, 距轴 r 处线速度为 ωr 。在图示瞬间, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 均由 D 指向棒的两端, 因此两端均比 D 电势高。由

$$U(r) - U_D = \int_0^r B\omega r' dr' = \frac{1}{2}B\omega r^2$$

得到

$$U_C - U_A = \frac{1}{6}B\omega l^2,$$

$$U_A - U_D = \frac{1}{18}B\omega l^2,$$

$$U_C - U_D = \frac{2}{9}B\omega l^2.$$

3. 距转轴 PQ 为 y 的点速度为 ωy , PS 边上

$$\varepsilon'_{PS} = \int_0^a B\omega y dy = \left[\frac{1}{2}B\omega a^2 \right].$$

按图中 S 点速度向里, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 沿 $P \rightarrow S$, 故 S 端电势较高。由于 $\mathbf{B}$ 始终平行转轴并位于线框平面内, 整个闭合回路的磁通量恒为零, 因此

$$\varepsilon_{\text{loop}} = 0.$$

三、计算题

1. 取 AO 为转轴, 令圆弧所在瞬间位于 xy 平面, AO 沿 x 轴, $\mathbf{B}$ 沿 y 轴。圆弧上点到转轴的距离为 y , 其速度大小为 ωy , 并按图示指向纸内。因此

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = B\omega y dx.$$

四分之一圆满足 $x^2 + y^2 = R^2$ 。从 A 到 C :

$$\varepsilon_{AC} = B\omega \int_R^0 \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{4}B\omega R^2.$$

所以

$$|\varepsilon| = \frac{\pi}{4}B\omega R^2.$$

负号表明按 $A \rightarrow C$ 积分时电动势为负, 即正电荷受非静电力驱动方向为 $C \rightarrow A$, A 端电势较高。

2. 导体棒下滑速度为 v 时, 动生电动势

$$\varepsilon = Blv, \quad I = \frac{Blv}{R}.$$

磁场对棒的安培力向上：

$$F_B = BIl = \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

取向向下为正，运动方程

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

结合 $v(0) = 0$ ，解得

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-B^2 l^2 t / (mR)} \right).$$

终端速度为

$$v_{\infty} = \frac{mgR}{B^2 l^2}.$$

练习十七

感生电动势、涡流与自感

一、选择题

- 答案：B。**轴对称变化磁场在柱内外均产生环形感生电场。点 P 位于圆柱右侧，场方向必沿圆周切向，即向上或向下，具体取决于 dB/dt 的符号。
- 答案：B。**磁铁下落时铜管中产生涡流，涡流磁场阻碍磁铁运动。开始时仍加速，随后磁阻力随速度增大并与重力平衡，磁铁以终端速度匀速下落。
- 答案：C。**感生电场沿以螺线管轴为中心的圆周切向。直径段 ab 上场与线元垂直，故无感生电动势；弦 cd 上有非零切向分量。按图中电流刚接通时磁场增长方向，感生场沿 $c \rightarrow d$ ，故 d 端电势高。
- 答案：C。**实际涡流必须在铜板内部形成闭合回路，且应跨越磁场边界以反抗穿过铜板的磁通变化，因此图中的涡流线 2 正确。
- 答案：A。**变化磁场产生的感生电场是非保守场，闭合回路中存在感应电动势，但不能用单值标量电势描述整个回路，因而不能脱离积分路径定义 $U_a - U_b$ 。

二、填空题

- 细螺绕环内

$$B = \mu_0 n I.$$

线圈 A 的总磁通链为 $NBS = N\mu_0 n IS$ ，故

$$\varepsilon = N\mu_0 n S \left| \frac{dI}{dt} \right|.$$

代入数据：

$$\varepsilon = 1.26 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

感应电流

$$I_A = \frac{\varepsilon}{R} = 6.28 \times 10^{-4} \text{ A}.$$

两秒内通过某截面的电量

$$q = I_A \Delta t = 1.26 \times 10^{-3} \text{ C}.$$

- 产生动生电动势的非静电力是**洛伦兹磁力**；产生感生电动势的非静电力是**感生电场力**。
- 线圈总匝数为 N ，面积为 $S = \pi(d/2)^2$ 。磁场由 $+B$ 突然变为 $-B$ ，总磁通链变化大小

为 $2NBS$ 。冲击电量

$$\Delta q = \frac{2NBS}{R},$$

故

$$B = \frac{\Delta q R}{2NS}.$$

代入 $\Delta q = 2.5 \times 10^{-7} \text{ C}$ 、 $R = 1000 \Omega$ 、 $N = 2000$ 、 $d = 2.5 \text{ cm}$ ：

$$B \approx 1.27 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

三、计算题

1. 长直导线距矩形近边为 r ，矩形宽为 b 、平行导线的边长为 l 。取垂直纸面向里为磁通正方向：

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I(t) l}{2\pi} \ln \frac{r(t) + b}{r(t)}.$$

- (1) I 恒定、 $r(t) = r_0 + vt$ ：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l b v}{2\pi r(r+b)}.$$

故

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I l b v}{2\pi r(r+b)}.$$

回路远离导线时向里磁通减小，感应电流应产生向里磁场，因此为顺时针 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 。

- (2) 回路不动， $I = I_0 \sin \omega t$ ：

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega l}{2\pi} \ln \frac{r+b}{r} \cos \omega t.$$

方向随 $\cos \omega t$ 的正负改变。

- (3) $I = I_0 \sin \omega t$ 且 $r = r_0 + vt$ ：

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[I_0 \omega \cos \omega t \ln \frac{r+b}{r} \right. \\ & \left. + I_0 \sin \omega t v \left(\frac{1}{r+b} - \frac{1}{r} \right) \right]. \end{aligned}$$

即

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \left[\omega \cos \omega t \ln \frac{r+b}{r} - \frac{bv \sin \omega t}{r(r+b)} \right], \quad r = r_0 + vt.$$

2. 设金属棒为水平弦，弦长 l_0 ，弦到圆心的距离

$$d = \sqrt{R^2 - \frac{l_0^2}{4}}.$$

圆柱内感生电场大小为

$$E_\varphi = \frac{\rho}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

沿该弦的切向分量为常量

$$E_x = \frac{d}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

因此棒上的感生电动势

$$|\varepsilon_{AB}| = \frac{l_0 d}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{l_0}{2} \sqrt{R^2 - \frac{l_0^2}{4}} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

题图中 $\mathbf{B}$ 指向纸内且随时间增大，感生场为逆时针；在圆心下方的弦上场沿 $A \rightarrow B$ ，故

$$U_B > U_A.$$

练习十八

自感（续）、互感与磁场能量

一、选择题

1. **答案：A。**要使一个线圈产生的磁通尽量不穿过另一个线圈，可令一个线圈平面平行于两圆心连线，另一个线圈平面垂直于两圆心连线，使两者耦合近似为零。
2. **答案：D。**自感系数

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{NBS}{I} = \frac{200 \times 2 \times 2 \times 10^{-4}}{4} = 2.0 \times 10^{-2} \text{ H} = 20 \text{ mH}.$$

3. **答案：C。**大线圈中心场近似均匀：

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2R}.$$

穿过小线圈的总磁通链为 $N_1 B_2 \pi r^2$ ，所以

$$M = \frac{N_1 B_2 \pi r^2}{I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2}{2R}.$$

4. **答案：B。**长螺线管 $L \propto \mu r^2$ ，故

$$L_1 : L_2 = \mu_1 r_1^2 : \mu_2 r_2^2 = 2 \times 1^2 : 1 \times 2^2 = 1 : 2.$$

电流相等时 $W_m = LI^2/2$ ，所以磁能比同样为 1 : 2。

5. **答案：D。** $W_m = LI^2/2$ 适用于自感系数为常量的任意线性线圈系统。

二、填空题

1. 互感系数满足互易性 $M_{AB} = M_{BA}$ 。两线圈电流相同，故

$$\Phi_{BA} = \Phi_{AB}.$$

这里的 Φ 指相应线圈的磁通链；若只指单匝磁通，还应明确各线圈匝数。

- 2.

$$|\varepsilon_L| = L \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right| = 0.25 \times \frac{2}{1/16} = \boxed{8.0 \text{ V}}.$$

3. O 点位于两同向电流正中间，两场大小相等、方向相反：

$$\boxed{w_{mO} = 0}.$$

P 点到两导线距离分别为 a 和 $3a$ ，两场同向：

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3a} \right) = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a}.$$

真空磁能密度

$$w_{mP} = \frac{B_P^2}{2\mu_0} = \frac{2\mu_0 I^2}{9\pi^2 a^2}.$$

三、计算题

1. 顺串联时两个线圈的互感电动势与自感电动势同向叠加：

$$L_{\text{顺}} = L_1 + L_2 + 2M.$$

反串联时互感项相减：

$$L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

结果也可由总磁通链 $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ 对串联电流求比值得到。

2. 环形螺线管内距轴 r 处的磁场为

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \quad a < r < b.$$

磁能密度

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

体积元为 $dV = 2\pi r h dr$ ，所以总磁能

$$\begin{aligned} W_m &= \int_a^b \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r h dr \\ &= \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r h dr \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

又 $W_m = LI^2/2$ ，因此

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

证毕。

练习十九

麦克斯韦方程组与电磁波

一、选择题

1. **答案：B**。无论由传导电流还是位移电流激发，磁场均满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，其磁力线闭合，属于涡旋场。
2. **答案：A**。任何磁场通过任意闭合曲面的总磁通量均为零，因此两种磁场都满足 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。
3. **答案：D**。静电荷激发的电场必有 $\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0$ ；变化磁场激发的电场满足法拉第定律，但对某一特定回路，若穿过该回路的磁通变化率恰为零，环路积分也可能为零。
4. **答案：C**。静电场是保守场；变化磁场激发的感生电场是涡旋场。
5. **答案：D**。位移电流的本质是随时间变化的电位移通量，即变化的电场。

二、填空题

1. 在没有自由传导电流的区域，麦克斯韦-安培定律为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

法拉第定律为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

2. (1) 电力线起于正电荷、止于负电荷：

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{free}}.$$

- (2) 变化磁场伴随电场：

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

- (3) 磁感应线无头无尾：

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

- (4) 静电场为保守场：

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

3. 对应关系为

$$\boxed{(1) \text{ 图 2}}, \quad \boxed{(2) \text{ 图 3}}, \quad \boxed{(3) \text{ 图 1}}.$$

三、计算题

1. 点电荷在圆面处所张立体角为

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right).$$

穿过圆面的电位移通量为

$$\Phi_D = \frac{q\Omega}{4\pi} = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right).$$

电荷以速率 v 向 O 点运动, $dx/dt = -v$, 故位移电流

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{q}{2} \frac{a^2 v}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

即

$$\boxed{I_d = \frac{qva^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}}.$$

方向与逐渐增强的电位移通量方向一致。

2. 大圆环总电荷 $Q = 2\pi r_2 \lambda$, 以角速度 ω 转动时等效电流

$$I_2 = \frac{Q\omega}{2\pi} = \lambda r_2 \omega.$$

因 $r_2 \gg r_1$, 大环中心附近磁场近似均匀:

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2r_2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2}.$$

穿过小环的磁通量

$$\Phi = \pi r_1^2 B = \frac{\mu_0 \pi \lambda r_1^2}{2} \omega.$$

因此感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 \pi \lambda r_1^2}{2} \frac{d\omega}{dt},$$

感应电流

$$\boxed{I_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0 \pi \lambda r_1^2}{2R} \frac{d\omega}{dt}}.$$

负号表示其方向总是阻碍大环磁场的变化: 若正电大环按某方向加速转动, 小环电流产生的磁场方向与大环磁场相反; 若减速, 则方向相同。

练习二十

电磁感应习题课

一、选择题

- 答案：D。**变化磁场产生的感生电场存在于整个空间，直导线和弯曲导线中均有电动势。由于感生电场的线积分依赖路径，弯曲路径围成的有效面积更大，其电动势大于直线段。
- 答案：B。**垂直纸面向里的磁场减小时，感应电流应产生向里的磁场，因此圆周上的电流为顺时针；上下两个半圆对称，直径支路中电流为零。
- 答案：A。**铜环中涡流严格按楞次定律阻碍磁铁插入，外力需作正功；铁环对磁铁有明显吸引作用，磁场力会帮助插入，因此相同位移下通常有 $A_1 > A_2$ 。
- 答案：C。**电子在圆周右端速度向上，要使磁力向圆心，磁场必须垂直纸面向外。若该向外磁场随时间增强，感生电场为顺时针，在右端向下；电子带负电，所受电场力向上，与速度同向，速率增大。
- 答案：D。**轴向电流增大时，导线内部环形磁场增强。上、下半部的涡流应分别产生与原磁场变化相反的磁场，图 D 所示两涡流环方向正确。

二、填空题

- 当导体薄片电阻率为

$$\boxed{0}$$

时，可视为理想导体。任意微小磁通变化都会激发无衰减涡流，完全屏蔽薄片下方磁场变化， P 点探测不到变化。

- 位移电流

$$I_d = C \frac{dU}{dt}.$$

所以

$$C = \frac{1.0}{1.0 \times 10^6} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ F} = \boxed{1.0 \mu\text{F}}.$$

- 自由空间中无自由电荷与传导电流：

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0},$$

$$\boxed{\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}},$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

三、计算题

1. 矩形线圈长边 l 与直导线平行, 近边距导线 a , 远边距导线 b 。直导线电流在矩形区域产生的磁通量

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 l I(t)}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

给定 $I(t) = I_0 e^{-3t}$,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 l I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} e^{-3t}.$$

故

$$|\varepsilon| = \frac{3\mu_0 l I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} e^{-3t}.$$

长直导线电流向右时, 线圈处磁场指向纸内; 该磁场随时间减弱, 感应电流应维持向里磁场, 所以线圈中电流为**顺时针**。

由 $\Phi = MI$ 得互感系数

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

2. 设电阻棒距圆心为 x , 其在圆内的长度为

$$L(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2}.$$

棒以速度 $v = dx/dt$ 运动, 动生电动势

$$\varepsilon = BLv.$$

棒的电阻为

$$R(x) = r_0 L.$$

因此回路电流

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bv}{r_0},$$

与棒长无关。棒从直径处 $x = 0$ 移到刚离开圆环 $x = a$, 通过任一截面的总电量

$$q = \int I dt = \frac{B}{r_0} \int_0^a v dt = \frac{B}{r_0} \int_0^a dx.$$

故

$$q = \frac{Ba}{r_0}.$$

方向由楞次定律判断：棒向外运动时回路面积减小，感应电流产生的磁场应维持原磁通方向。

常用结论汇总

静电场

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla U, \quad W_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV.$$

恒稳磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{in}}, \quad \mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

电磁感应

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \varepsilon_{\text{mot}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

麦克斯韦方程组（积分形式）

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q_{\text{free}}, & \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d\Phi_B}{dt}, \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0, & \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_{\text{free}} + \frac{d\Phi_D}{dt}. \end{aligned}$$